Vektorräume

Definition

Sei V eine nichtleere Menge. Dann heisst V ein **reeller Vektorraum**, wenn eine innere Operation (Addition)

$$\begin{array}{rcrcl} + & : & V \times V & \to & V \\ & & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$

und eine äussere Operation (Multiplikation mit einem Skalar)

$$\begin{array}{rcrcl} \cdot & : & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & & (\alpha,a) & \mapsto & \alpha a \end{array}$$

definiert sind, so dass folgende Axiome gelten:

Definition (Fortsetzung)

- A1 $\forall u, v \in V\colon\ u + v = v + u$
- A2 $\forall u, v, w \in V\colon\ (u + v) + w = u + (v + w)$
- A3 $\exists 0 \in V$ so, dass $\forall u \in V\colon\ u + 0 = u$
- A4 $\forall u \in V\ \exists -u \in V$ so, dass $u + (-u) = 0$
- M1 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V\colon\ (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
- M2 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V\colon\ (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ und $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- M3 $\forall u \in V\colon\ 1u = u$

Der Vektor $0 \in V$ heisst **Nullvektor**.
Ein **komplexer VR** ist entsprechend, mit $\mathbb{C}$ an Stelle von $\mathbb{R}$, definiert.

Beispiel

Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathbb{K}$ ein Körper (z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$). Auf der Menge $F(A, \mathbb{K}) := \{f : A \to \mathbb{K}\}$ aller Funktionen auf A mit Werten in $\mathbb{K}$ werden die Addition und die Multiplikation mit Skalaren punktweise (d.h. für alle $s \in A$) folgendermassen definiert: Für $f, g \in F(A, \mathbb{K})$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ sei

$$\begin{aligned} (f+g)(s) &:= f(s) + g(s) \\ (\alpha f)(s) &:= \alpha f(s) \end{aligned}$$

Dann ist $F(A, \mathbb{K})$ ein Vekorraum über $\mathbb{K}$.

Beispiel

Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Dann ist die Menge

$$C(A, \mathbb{R}) := \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$$

aller stetigen, reellen Funktionen auf A eine Teilmenge von $F(A, \mathbb{R})$ und selber ein VR.

Struktur von Vektorräumen

Definition

Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V heisst **Unterraum** von V, falls

1. $\forall a, b \in U$: $a + b \in U$ (d.h. U ist abgeschlossen unter Addition) und
2. $\forall a \in U, \forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\alpha a \in U$ (d.h. U ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren)

Lemma

Ein Unterraum ist selber ein Vektorraum.

Beispiel

$C([a, b], \mathbb{R})$ ist ein Unterraum von $F([a, b], \mathbb{R})$.

Beispiel

$P_n := \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k : a_k \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$ und $P := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Dann sind P und alle P_n Unterräume vom $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Beispiel

Die Menge $C^n(]a,b[,\mathbb{R})$ aller n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $]a,b[$ ist ein Unterraum $C(]a,b[,\mathbb{R})$.

Beispiel

Es gilt die Kette von Inklusionen

$$F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset \ldots$$
$$\ldots \supset C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset P \supset \ldots \supset P_2 \supset P_1 \supset P_0 \supset \{0\}$$

wobei jeder Raum Unterraum aller ihn einschliessenden Vektorräume ist.

Beispiel

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $b = 0$.

Durchschnitt und Summe von Unterräumen

Satz

Seien U_1, U_2 Unterräume eines VR V. Dann sind

- $U_1 \cap U_2 = \{u \in V : u \in U_1 \text{ und } u \in U_2\}$ und
- $U_1 + U_2 = \{v = u_1 + u_2 \in V : u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$

Unterräume von V.

Achtung: $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein UR.

Beispiel

- $\{0\}$ und V sind UR von V.
- Ist $v \in V$, so ist $\{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$ ein UR von V.

Beispiel

Sind v_1, v_2 zwei nicht parallele Vektoren in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, so sind

- $U_i := \{\alpha v_i : \alpha \in \mathbb{R}\}$ zwei Geraden durch den Ursprung
- $U_1 + U_2 = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 : \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ die Ebene welche die beiden Geraden enthält

Unterräume von $\mathbb{R}^3$.