Linearkombinationen

Definition

Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren im VR V und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Dann heisst

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Linearkombination (LK) der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Beispiel

Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren im VR V. Dann ist

$$U := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

ein UR von V. Dieser heisst der von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **aufgespannte** oder **erzeugte Unterraum** und wird mit $\operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bezeichnet.

Definition

Falls für einen VR V gilt, dass $\operatorname{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$, so heisst $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ein **Erzeugendensystem** von V. In diesem Fall heisst V **endlichdimensional**.

Beispiel

Sei $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Dann ist $w_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine LK von v_1, v_2, denn das LGS $w_1 = x_1 v_1 + x_2 v_2$ hat eine Lösung: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.
- Aber $w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist keine LK von v_1, v_2, denn das LGS $w_2 = x_1 v_1 + x_2 v_2$ hat keine Lösung.

Beispiel

$$\begin{aligned} P_4 &= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 : a_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\{1, x, x^2, x^3, x^4\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \binom{x}{2}, \binom{x}{3}, \binom{x}{4} \right\} \end{aligned}$$

wobei $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{k!}$.

Beispiel

Der UR der symmetrischen 2×2-Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}(\mathbb{R})$$

wird aufgespannt von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 4 & 14 \\ 9 & 20 & 13 & 7 \end{pmatrix}$.

Mit Hilfe des Gauss-Algorithmus findet man für den Unterraum von $\mathbb{R}^4$

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -17 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 19 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel

Der VR P aller Polynome ist unendlichdimensional, denn er besitzt kein endliches Erzeugendensystem.

Beispiel

Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$, falls $\det(v_1\ v_2\ \ldots\ v_n) \neq 0$.

Lemma

Seien $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ und $A = (v_1\ v_2\ \ldots\ v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Dann sind äquivalent

- $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sind ein Erzeugendensystem in $\mathbb{R}^n$.
- Jeder Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ ist LK der $v_1, v_2, \ldots, v_k$.
- Für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ besitzt $\sum_{i=1}^k x_i v_i = b$ eine Lösung.
- Für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ besitzt das LGS $Ax = b$ eine Lösung.
- $\operatorname{Rang} A = n$.

Folgerung: Falls $k < n$ ist, kann $v_1, v_2, \ldots, v_k$ kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$ sein.

Lineare Unabhängigkeit

Definition

Sei V ein VR. Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ heissen **linear unabhängig**, falls

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = 0$$

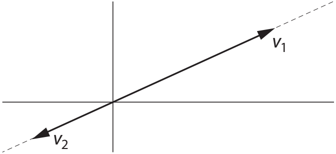
nur die triviale Lösung $x_1 = \ldots = x_n = 0$ hat. Andernfalls heissen die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ **linear abhängig**.

Anders gesagt: Falls der Nullvektor nur auf die triviale Art als LK der v_i dargestellt werden kann, so sind die v_i linear unabhängig. Und entsprechend: Falls der Nullvektor auf nichttriviale Art als LK der v_i dargestellt werden kann, so sind die v_i linear abhängig.

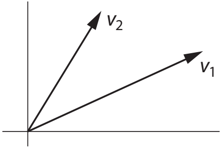
Beispiel

- Falls einer der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ der Nullvektor ist, so sind diese Vektoren linear abhängig.
- Zwei Vektoren v_1, v_2 sind linear abhängig genau dann, wenn ein Vektor ein Vielfaches des andern ist.

Geometrische Interpretation
In $\mathbb{R}^2$:

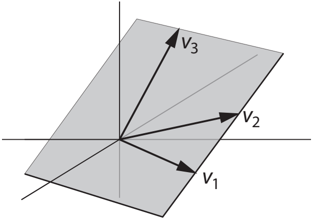


Zwei kollineare Vektoren sind linear abhängig

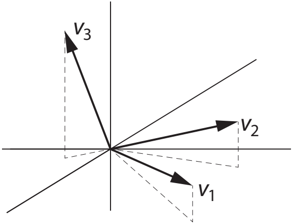


Zwei nicht kollineare Vektoren sind linear unabhängig

In $\mathbb{R}^3$:



Drei komplanare Vektoren sind linear abhängig



Drei nicht komplanare Vektoren sind linear unabhängig

Beispiel

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabängig, denn $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$ hat nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = 0$.

Beispiel

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn es gilt zum Beispiel $v_1 + v_2 - v_3 = 0$.