Repetition: Schreibweisen

Ausgeschrieben

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \dots & & & & & & = & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Erweiterte Matrix

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

Matrixschreibweise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

wobei

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Elementare Zeilenumformungen für die erweiterte Matrix

(I) Vertauschen zweier Zeilen

(II) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer andern

und gegebenenfalls noch

(III) Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$

Der Gauss-Algorithmus für die erweiterte Matrix

Beschreibung des Gauss-Algorithmus

1. Bestimme die am weitesten links stehende Spalte, die von Null verschiedene Elemente enthält.
2. Ist die oberste Zahl in der in Schritt 1 gefundenen Spalte Null, so vertausche man die erste Zeile mit einer andern, wo keine Null steht (Pivot).
3. Addiere ein passendes Vielfaches der obersten Zeile zu den übrigen Zeilen, um unterhalb des Pivots Nullen zu erzeugen.
4. Wende Schritt 1 bis 3 auf die Untermatrix an, die durch Streichen der ersten Zeile entsteht, und zwar solange, bis es nicht mehr geht. Dann ist die **Zeilenstufenform** erreicht.
5. Bestimme die Lösungsmenge durch Rückwärtseinsetzen.

Die folgende Definition bezieht sich auf die Zeilenstufenform:

Definition

Eine Variable x_k über einem Pivot heisst **Pivot-Variable** oder **führende Variable**. Alle übrigen Variablen heissen **freie Variablen** oder **freie Parameter**.

Bemerkung. Beim Rückwärtseinsetzen gilt:

- Nach Pivot-Variablen kann man auflösen.
- Freie Variablen kann man frei wählen.

Bemerkung. Die Zeilenstufenform kann noch wie folgt weiter modifiziert werden:

- Durch die Zeilenoperation (III) können alle Pivots auf den Wert 1 gebracht werden.
- Durch die Zeilenoperation (II) kann man dann auch über den Pivots Nullen erzeugen.

Das Resultat ist dann die sogenannte **normierte Zeilenstufenform**.