Rechenregeln

Im folgenden Satz nehmen wir an, dass alle vorkommenden Operationen für die Matrizen A, B, C, D definiert sind.

Satz

- Kommutativgesetz Addition: $A + B = B + A$
- Assoziativgesetz Addition: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Assoziativgesetz Multiplikation: $(AB)C = A(BC)$
- Distributivgesetz: $(A + B)C = AC + BC$ und $A(C + D) = AC + AD$

Ferner für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

ACHTUNG: Im Allgemeinen ist $AB \neq BA$.

Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$(\mathbb{I})_{ij} = \delta_{ij}$$

Spalten- und Zeilenstrukur

Spaltenstruktur

Sind $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ m-Spaltenvektoren (d.h. $m \times 1$-Matrizen), so bezeichnet

$$A = (a^{(1)} \ldots a^{(n)})$$

die $m \times n$-Matrix mit $a^{(i)}$ als i-te Spalte.

Zeilenstruktur

Sind $a^{[1]}, \ldots, a^{[m]}$ n-Zeilenvektoren (d.h. $1 \times n$-Matrizen), so bezeichnet

$$A = \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ \vdots \\ a^{[m]} \end{pmatrix}$$

die $m \times n$-Matrix mit $a^{[i]}$ als i-te Zeile.

Spaltenstruktur: $$\left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}}}_{a^{(1)}} \;\underbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix}}}_{a^{(2)}} \;\ldots\; \underbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}}}_{a^{(n)}}\right)$$

Zeilenstruktur: $$\left(\begin{array}{c} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}} \leftarrow a^{[1]} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \ldots \quad a_{2n}} \leftarrow a^{[2]} \\ \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \ldots \quad a_{mn}} \leftarrow a^{[m]} \end{array}\right)$$

Sätze

Spaltenstruktursatz

Sei $A = (a^{(1)} \dots a^{(n)})$ eine $m \times n$-Matrix mit Spalten $a^{(i)}$, $B = (b^{(1)} \dots b^{(p)})$ eine $n \times p$-Matrix mit Spalten $b^{(i)}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein n-Spaltenvektor und $e^{(i)}$ die i-te Spalte von $\mathbb{I}_n$. Dann gilt

- $Ae^{(i)} = a^{(i)}$
- $Ax = x_1 a^{(1)} + \dots + x_n a^{(n)}$ **(Linearkombination)**
- $AB = (Ab^{(1)} \dots Ab^{(p)})$

Zeilenstruktursatz

Sei $A = \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ \vdots \\ a^{[m]} \end{pmatrix}$ eine $m \times n$-Matrix mit Zeilen $a^{[i]}$,

$B = \begin{pmatrix} b^{[1]} \\ \vdots \\ b^{[n]} \end{pmatrix}$ eine $n \times p$-Matrix mit Zeilen $b^{[i]}$, $y = (y_1 \dots y_n)$

ein n-Zeilenvektor und $e^{[i]}$ die i-te Zeile von $\mathbb{I}_n$. Dann gilt

- $e^{[i]} B = b^{[i]}$
- $yB = y_1 b^{[1]} + \ldots + y_n b^{[n]}$ (**Linearkombination**)
- $AB = \begin{pmatrix} a^{[1]} B \\ \vdots \\ a^{[m]} B \end{pmatrix}$

Transpositionsregeln

Es seien A, B Matrizen, so dass die Operationen definiert sind. Dann gilt:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Inverse Matrix

Definition

- Sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann heisst A **invertierbar** oder **regulär** falls eine $n \times n$-Matrix X existiert, so dass $AX = \mathbb{I}_n$. X heisst dann **Inverse** von A.
- Falls A nicht regulär ist, nennt man A **singulär**.

Lemma: Eindeutigkeit

Falls A invertierbar ist, so ist die Inverse eindeutig bestimmt und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Bemerkungen: Sei A eine reguläre $n \times n$-Matrix. Dann gilt:

- Die Lösung von $Ax = b$ ist gegeben durch $x = A^{-1}b$.
- Bezeichnen wir mit $e^{(k)}$ die k-te Spalte von $\mathbb{I}_n$, so ist die k-te Spalte von A^{-1} die Lösung von $Ax = e^{(k)}$.