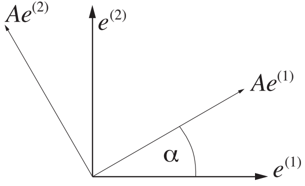
Drehungen und Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$

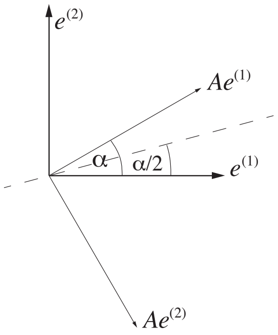
Ist A eine orthogonale 2×2-Matrix, so ist A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ Drehung um den Winkel } \alpha$$

oder

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an Achse mit Steigung } \frac{\alpha}{2}$$





Givens-Rotation

$$U(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ um den Winkel α um die Achse x_2.

LR-Zerlegung

Frage: Wie löst man effizient $Ax = b$ für viele verschiedene b?

Idee: (zunächst für $n \times n$ Matrizen)
Zerlege $A = LR$ mittels Gauss-Algorithmus in ein Produkt einer Linksdreiecksmatrix L und einer Rechtsdreiecksmatrix R.

Dann ist $Ax = b$ wie folgt lösbar:

1. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen
2. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Denn dann gilt $Ax = LRx$

LR-Zerlegung

Frage: Wie löst man effizient $Ax = b$ für viele verschiedene b?

Idee: (zunächst für $n \times n$ Matrizen)
Zerlege $A = LR$ mittels Gauss-Algorithmus in ein Produkt einer Linksdreiecksmatrix L und einer Rechtsdreiecksmatrix R.

Dann ist $Ax = b$ wie folgt lösbar:

1. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen
2. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Denn dann gilt $Ax = LRx = Ly$.

LR-Zerlegung

Frage: Wie löst man effizient $Ax = b$ für viele verschiedene b?

Idee: (zunächst für $n \times n$ Matrizen)
Zerlege $A = LR$ mittels Gauss-Algorithmus in ein Produkt einer Linksdreiecksmatrix L und einer Rechtsdreiecksmatrix R.

Dann ist $Ax = b$ wie folgt lösbar:

1. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen
2. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Denn dann gilt $Ax = LRx = Ly = b$.

LR-Zerlegung

Beispiel

Erster Eliminationsschritt:

$$\begin{array}{c} A = A_0 \\ \begin{array}{rrr} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{array} \end{array} \quad {\color{green}\cdot(-3)} \quad {\color{green}\cdot(+1)} \qquad \begin{array}{c} {\color{green}\longrightarrow} \\ {\color{red}\longleftarrow} \end{array} \qquad \begin{array}{c} A_1 \\ \begin{array}{rrr} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & 5 \end{array} \end{array} \quad {\color{red}\cdot(+3)} \quad {\color{red}\cdot(-1)}$$

Wegen des Zeilenstruktursatzes gilt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {\color{green}-3} & 1 & 0 \\ {\color{green}+1} & 0 & 1 \end{pmatrix} A_0 \qquad \text{und} \qquad A_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {\color{red}+3} & 1 & 0 \\ {\color{red}-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:{\color{blue}L_1}} A_1$$

Zweiter Eliminationsschritt:

$$\begin{array}{ccc} & A_1 & \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & 5 \end{array} \quad \cdot(+2) \qquad \rightleftarrows \qquad \begin{array}{ccc} & A_2 & \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \quad \cdot(-2)$$

Wiederum

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +2 & 1 \end{pmatrix} A_1 \qquad \text{und} \qquad A_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{=:L_2} A_2$$

Zusammen also

$$A = A_0 = L_1 A_1 = L_1 L_2 A_2$$

so dass mit $L := L_1 L_2$ und $R := A_2$ die gewünschte Zerlegung $A = LR$ gefunden ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Eine Matrix mit lauter 1 auf der Diagonalen und nur unterhalb einer solchen 1 in einer Spalte von 0 verschiedenen Koeffizienten, heisst **Frobenius-Matrix**. Diese Matrizen haben ein besonders einfaches Inverses. Z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Die Faktoren L_i beim Herstellen der LR-Zerlegung sind gerade Frobenius-Matrizen. Mit ihnen lassen sich die einzelnen Eliminationsschritte (Nullen unter einem Pivot erzeugen mit Zeilenoperationen II) darstellen: $A_{i-1} = L_i A_i$.

Ihr Produkt ist

$$L = L_1 L_2 \ldots L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

3. Spalte von L_3 ...

2. Spalte von L_2

1. Spalte von L_1

(Dies ergibt sich aus dem Spaltenstruktursatz.)

Satz 2.10

Sei A eine $m \times n$-Matrix. Die Durchführung des Gaussalgorithmuses sei möglich ohne Vertauschen von Zeilen.

Dann liefert das Gaussverfahren, angewandt auf A:

- eine invertierbare $m \times m$-Linksdreiecksmatrix $L = (\ell_{kj})$ mit Einsen auf der Diagonale und
- eine $m \times n$-Matrix R in Zeilenstufenform (Endschema) so dass gilt
$$LR = A$$

Beim Gaussverfahren wird das ℓ_{kj}-fache der Zeile j von Zeile k subtrahiert, um in Zeile k unter dem j-ten Pivot eine Null zu erzeugen.

Kompakte Schreibweise

Um Speicherplatz/Schreibarbeit zu sparen, werden bei der LR-Zerlegung beide Matrizen, also die Linksdreiecksmatrix L und die Zeilenstufenformmatrix R in einer einzigen Matrix abgespeichert: Statt

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ 0 & 0 & r_{33} & \dots & r_{3m} \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{nm} \end{pmatrix}$$

speichert/schreibt man lediglich

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ \ell_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & r_{33} & \dots & r_{3m} \\ \dots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & & r_{nm} \end{pmatrix}$$

Ersparnis:

Die Nullen in L und R und die Einsen auf der Diagonale von L werden nicht mitgespeichert.

Bemerkung

- Falls $m = n$, so ist R eine Rechtsdreiecksmatrix.
- $A = LR$ ist invertierbar $\iff$ R ist invertierbar.

Anwendung

Sei A eine $m \times n$-Matrix. Der Gaussalgorithmus für A sei ohne Zeilenvertauschung möglich. Dann kann man $Ax = b$ wie folgt lösen:

1. Bestimme die LR-Zerlegung $A = LR$.
2. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen.
3. Bestimme die Lösungsmenge von $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen.

Definition

Eine $n \times n$-Matrix P heisst **Permutationsmatrix**, falls sie aus $\mathbb{I}_n$ durch Vertauschung von Zeilen hervorgegangen ist.

Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{[3]} \\ e^{[1]} \\ e^{[2]} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

- Jede Permutationsmatrix ist orthogonal.
- In jeder Zeile und in jeder Spalte steht genau eine 1.
- In PA erscheinen die Zeilen von A so vertauscht, wie es die Zeilen von P sind.