Lemma

Ist A eine Dreiecksmatrix, so ist die Determinante von A das Produkt der Diagonalelemente.

Satz

Transponieren ändert die Determinante nicht:

$$\det A = \det A^T$$

Korollar

i. Vertauscht man zwei Spalten von A, so wechselt die Determinante das Vorzeichen.

ii. Addiert man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen so ändert sich die Determinate nicht.

Die Determinante ist als Funktion jeder Spalte linear, d.h.

iii. $\det\begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & \alpha a^{(i)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(i)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix}$ und

iv. $\det\begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(i)} + b^{(i)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(i)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & b^{(i)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix}$

Allgemeiner Entwicklungssatz

- Entwicklung nach der Spalte j

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

- Entwicklung nach der Zeile i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Produktsatz

Sind A und B zwei $n \times n$-Matrizen, so gilt

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Korollar

Ist die Matrix A invertierbar, so ist $\det A \neq 0$ und

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Blocksatz

Sei A eine $m \times m$-Matrix, B eine $m \times n$-Matrix und C eine $n \times n$-Matrix. Dann gilt für die $(m+n) \times (m+n)$-Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C$$

Effektive Berechnung von Determinanten

Sei A eine $n \times n$-Matrix und $PA = LR$ ihre LR-Zerlegung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det A &= \det P \det R = \\ &= (-1)^{\text{Anzahl Zeilenvertauschungen}} r_{11} r_{22} \dots r_{nn} \end{aligned}$$

Determinante und Rang

Sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann gilt

$$\det A \neq 0 \iff \operatorname{Rang} A = n$$

Satz (Determinanten und LGS)

Sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann sind äquivalent:

i. A ist invertierbar
ii. $\det A \neq 0$
iii. $\operatorname{Rang}(A) = n$
iv. Das LGS $Ax = b$ ist für jedes b lösbar.
v. Das LGS $Ax = b$ besitzt genau eine Lösung.
vi. Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.