D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 1	FS 2021

1) Seien $f_1, \ldots, f_d \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ definiert als

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_d(x)) \, .$$

   a) Zeige, dass falls ein $i \in \{1, \ldots, d\}$ existiert, so dass f_i injektiv ist, dann folgt dass f injektiv ist.

   b) Sei $d \geq 2$. Finde ein Beispiel, für welches sämtliche f_i surjektiv sind, aber f *nicht* surjektiv ist.

2) Sei $f = (f_1, f_2) \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$. Skizziere das Bild von f, i.e.

$$\left\{ (f_1(t), f_2(t)) \,\middle|\, t \in [0, 1] \right\} ,$$

für

   a) $f(t) = (t, t^2)$,

   b) $f(t) = (t \sin(2\pi t), \cos(2\pi t))$,

   c) $f(t) = (e^t, \frac{1}{1+t^2})$.

3) Welche der folgenden Gleichung definiert eine ODE?[1] Welche sind linear? Welche sind linear und homogen?

   a) $f'(x) = f(ax + b)$,

   b) $y^3 = y'' \cdot y'$,

   c) $y'' + \sin(y) y = x^3$,

   d) $y' = \sin(x)$,

[1] ODE steht für "ordinary differential equation", sprich, "Gewöhnliche Differentialgleichung".

e) $y^{(3)} + 2y' + y = 0.$

4) Finde jeweils eine (einfache) lineare ODE, für welche f eine Lösung ist:

a) $f(x) = e^{x^2}$,
b) $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$,
c) $f(x) = \sin(x)^{10}$.