D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 10	FS 2021

Hinweis: Während der ganzen Serie darf Satz 3.24 aus den Handnotizen verwendet werden.

1) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ eine C^1 Funktion, $\gamma\colon [a,b] \to X$ ein parametrisierter Weg. Kreuze die richtigen Aussagen an:

   ☐ Falls $g\colon X \to \mathbb{R}$ ein Potential von f ist, dann ist für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ auch $h := g + C$ ein Potential von f.

   ☐ Das Vektorfeld f ist genau dann konservativ, wenn f ein Potential g besitzt.

   ☐ Falls X sternförmig ist, dann ist f konservativ.

   ☐ Falls für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ die Gleichung $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ gilt, dann ist f konservativ.

   ☐ Seien $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ offen mit $\bigcup_{k=1}^m A_k = X$. Falls $f|_{A_k}$ für alle $k = 1, \dots, m$ konservativ ist, dann ist f konservativ.

2) Entscheide, ob folgende Vektorfelder $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ein Potential besitzen:

Wertebereich	**Vektorfeld**	**Ja**	**Nein**
$X = \mathbb{R}^2$	$f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$	☐	☐
$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$	$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$	☐	☐
$X = \mathbb{R}^2$	$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$	☐	☐
$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$	$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^z \sin(z) x \\ 0 \\ \frac{1}{2} x^2 e^z (\cos(z) + \sin(z)) \end{pmatrix}$	☐	☐

3) Kreuze, für die folgenden Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, die richtigen Eigenschaften an:

	Wegzshg.	**Konvex**	**Sternenförm.**
$X = \mathbb{R}^2$	☐	☐	☐
$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0} \times (0,1)$	☐	☐	☐
$X = (-1,1)^2 \setminus \{(0,0)\}$	☐	☐	☐
$X = (0,1) \cup (2,3)$	☐	☐	☐
$X = (\{0\} \times (-1,1)) \cup ((-1,1) \times \{0\})$	☐	☐	☐

4) Betrachte das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die parametrisierten Wege

$$\gamma_1,\ \gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_1(t) := (t,t,t),\ \gamma_2(t) := (t,t^2,t^3).$$

Berechne

$$\int_{\gamma_i} f(s)\,ds, \quad i = 1,2,$$

und schliesse, dass f nicht konservativ ist.

5) Sei

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yze^{xyz} + 1 \\ xze^{xyz} + \frac{1}{y} \\ xye^{xyz} \end{pmatrix}.$$

Bestimme, ob f konservativ ist. Falls ja: finde ein zugehöriges Potential.

6) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz \\ 2yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

und sei

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \gamma(t) := \left(\frac{\sin(\pi/2 \cdot t)10^t}{t^3 + 3t^2 + 1}, 2t^4 \cos(2\pi t)^3, 2t \right).$$

Berechne das Wegintegral

$$\int_\gamma f(s)\, ds.$$