D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 11	FS 2021

1) Seien A, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Mengen und χ_A, $\chi_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die dazugehörigen Charakteristischen Funktionen.[1] Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ $\chi_{A \bigcap B} = \chi_A \cdot \chi_B$,
- ☐ $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$,
- ☐ $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_B$ falls $B \subseteq A$,
- ☐ $\chi_A \leq \chi_B$ falls $B \subseteq A$,
- ☐ $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$.

2) Sei $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$, $B \subseteq A \subseteq R$ und $f \colon R \to \mathbb{R}$ beschränkt. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ Die Funktion $g(x, y) = e^x$ auf R (wie oben) ist integrierbar.
- ☐ Falls f positiv und integrierbar auf A ist, dann gilt $\int_A f(x, y)\, d(x, y) \geq 0$.
- ☐ Falls f auf B und A integrierbar ist, dann gilt $\int_B f(x, y)\, d(x, y) \leq \int_A f(x, y)\, d(x, y)$
- ☐ Es gilt, für f integrierbar auf A und B: $\int_R \chi_{A \setminus B}(x, y)\, d(x, y) = \int_A d(x, y) - \int_B d(x, y)$.

3) Sei

$$f \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

[1] Zur Erinnerung: $\chi_A(x) = 1$ falls $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$ falls $x \notin A$.

Seien

$$
\begin{aligned}
Y &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > 0\right\} \\
Z &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > 0\right\} \\
U &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < 0\right\} \\
T &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y < 0\right\}.
\end{aligned}
$$

Berechne Potentiale g_Y, g_Z, g_U, g_T, so dass zudem

$$g_Z\big|_{Z\bigcap Y} = g_Y\big|_{Z\bigcap Y},\ g_U\big|_{U\bigcap Z} = g_Z\big|_{U\bigcap Z},\ g_T\big|_{T\bigcap U} = g_U\big|_{T\bigcap U}.$$

Berechne $g_T - g_Y$ auf $T \bigcap Y$. Erkläre die Relation zum Wegintegral

$$\int_\gamma f(s)\,ds,$$

wobei γ den Einheitskreis mit Zentrum $(0,0)$ bezeichnet.

4) Sei $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (x,y) = \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2l-1}{2^n}\right) \text{ für } k,\, l \in \mathbb{N} \text{ und } n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, anhand von Ober- und Untersummen, dass f nicht integrierbar ist.

b) Zeige, dass für alle $x \in [0,1]$ die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar ist mit

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = 0$$

und somit $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)\,dx = 0$.