D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 3	FS 2021

1) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ and $x \in \mathbb{R}^n$.

   - ☐ f ist stetig in x, falls es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $f(x_k) \to f(x)$ für $k \to \infty$.
   - ☐ $f \circ g$ and $g \circ f$ sind immer definiert.
   - ☐ Falls $g \circ f$ und f stetig sind, dann ist auch g stetig.

2) Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

   - ☐ $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + 3z$,
   - ☐ $f(x, y) = \inf\{x^k + y^k \,\big|\, k \in \mathbb{Z}\}$, für $(x, y) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$,
   - ☐ $f(x, y) = \inf\{x^k + y^k \,\big|\, k \in \mathbb{Z}\}$, für $0 \leq x,\ y < 1$,
   - ☐ $f(x, y) = \int_x^y \cos(t)\, dt$, für $x < y$.

3) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert wie folgt:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   Zeige, dass f stetig ist.

4) Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und y in $\mathbb{R}^n$:

$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige folgende Äquivalenz:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = y \iff \forall 1 \leq j \leq n\colon \lim_{k\to\infty} x_{k,j} = y_j.$$

5) Zeige, dass das kartesische Produkt von stetigen Abbildungen stetig ist, das heisst: falls $f_i\colon \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{m_i}$ für $i = 1, 2$ stetig sind, dann ist

$$f := (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}^{m_1+m_2}$$

stetig.