D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 5	FS 2021

1) Berechne $df(x_0)\,[v]$ für

   a) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 3,\ v = 5,$

   b) $f(x,y) = \cos(x)^2 \cdot y, \quad x_0 = (\pi/4, 1),\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

   c) $f(x,y,z) = e^x \ln(y) + z, \quad x_0 = (0,1,0),\ v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2) Seien

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ zy^2 \end{pmatrix}$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x,y) := \begin{pmatrix} xy \\ e^{x+y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Jacobi-Matrix $J_{f\circ g}(x_0)$ an der Stelle $x_0 = (2,1)$.

3) Sei

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

und

$$f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) = (0, \sin(t), \cos(t)).$$

   a) Skizziere und beschreibe die Hyper-Fläche $g^{-1}(1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

   b) Zeige, dass das Bild von f in $g^{-1}(1)$ enthalten ist.

   c) Berechne den Gradienten $\nabla g(x,y,z)$ und $\nabla g(f(t))$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ und $t \in [0, 2\pi]$.

   d) Skizziere $f'(t)$ und $\nabla g(f(t))$ auf der Hyper-Fläche $g^{-1}(1)$ für $t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

4) Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeige, dass f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Hinweis: Argumentiere per Widerspruch und mit Satz 2.32 aus der Vorlesung.