D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 6	FS 2021

1) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g\colon X \to \mathbb{R}^m$. Kreuze die richtigen Aussagen an:

- ☐ Falls f C^2 auf X ist, dann ist f auch C^1 auf X.
- ☐ Falls f und g jeweils C^3 und C^2 auf X sind, dann ist $f \cdot g$ C^3 auf X.
- ☐ Sei $f = (f_1, \dots, f_m)$, wobei f_i Polynome sind und g ist C^k. Dann ist (falls definiert) f/g C^k auf X.
- ☐ Sei f C^k mit $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt im Allgemeinen

$$\partial_{xy} f = \partial_{yx} f.$$

2) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^k Abbildung mit $k \geq 2$. Kreuze die richtigen Aussagen an:

- ☐ Der Gradient $\nabla f(x)$ ist eine $n \times n$ Matrix.
- ☐ Die Hessesche Matrix $\mathrm{Hesse}_f(x)$ ist eine quadratische Matrix.
- ☐ $\mathrm{Hesse}_f(x)$ ist symmetrisch.
- ☐ $\mathrm{Hesse}_f(x)$ ist invertierbar.

3) Bestimme die Hessesche Matrix der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ and der Stelle (x_0, y_0):

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2, \quad (x_0, y_0) = (1,1),$

b) $f(x,y) = \cos(x) + \sin(y)x, \quad (x_0, y_0) = (\pi/2, \pi/2),$

c) $f(x,y) = y^3 \cdot \left(\sin\left(e^{y^5 \cdot \sin(y^2)}\right) \cdot \cos(\sinh(y))\right), \quad (x_0, y_0) = (0,0).$

4) Bestimme das Taylorpolynom der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bis zur zweiten Ordnung an der Stelle (x_0, y_0):

   a) $f(x,y) = x^3 + xy^4, \quad (x_0, y_0) = (1, 0),$
   b) $f(x,y) = \sin(y) \cdot e^{-x}, \quad (x_0, y_0) = (0, \pi).$

   Hinweis: Die folgende allgemeine Formel darf verwendet werden (siehe Seite 76 in den Handnotizen zur Vorlesung):

$$T_2 f((x,y);(x_0,y_0)) = f(x_0,y_0) + \left\langle \nabla f(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}(x,y) \cdot \mathrm{Hesse}_f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$