D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 7	FS 2021

1) Untersuche die Matrizen auf ihre Definitheit:[1]

	pos.	**neg.**	**indef.**
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐
$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐

2) Seien $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon K \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Kreuze die richtigen Aussagen an:

- ☐ f besitzt eine Extremalstelle.
- ☐ g besitzt keine Extremalstelle.
- ☐ g bestitzt mindestens zwei Extremalstellen.
- ☐ Die Stelle x_0 ist eine lokale Minimalstelle genau dann wenn für jedes $\delta > 0$ mit $C(x_0, \delta) \subseteq X$ gilt

$$f(y) \leq f(x_0), \ \forall y \in C(x_0, \delta).$$

- ☐ Falls $df(x_0) = 0$ gilt, ist $f(x_0)$ entweder ein lokales Minumum oder Maximum.
- ☐ Die Menge der kritischen Punkte von f ist immer endlich.

[1] Als Erinnerung: für invertierbare Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (nicht zwingend symmetrisch!) gilt: A ist positiv definit (resp. negativ definit), falls für alle $v \in \mathbb{R}^n$ folgendes gilt: $v^T Av \geq 0$ (resp. ≤ 0). Falls A weder positiv noch negativ definit ist, nennt man A indefinit.

3) Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

genau dann positiv definit ist, wenn $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$ gelten.

4) Sei $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$. Zeige,

$$\nabla f(1, 1, 1) = 0 \in \mathbb{R}^3,$$

und bestimme die Eigenwerte von $\mathrm{Hesse}_f(1, 1, 1)$.

5) Bestimme die Maxima und Minima der Funktion

$$f\colon [0, 1]^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto xy\left(1 - x^2 - y^2\right).$$