D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 9	FS 2021

1) Sei $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, und $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Kreuze die richtigen Aussagen an.

   - ☐ Das Wegintegral $\int_\gamma f(s)\,ds$ ist eine reelle Zahl.
   - ☐ Falls $\gamma(t) \equiv v$ für alle $t \in [a,b]$, dann gilt $\int_\gamma f(s)\,ds = 0$.
   - ☐ Für $\sigma(t) := \gamma(-t)$ gilt $\int_\sigma f(s)\,ds = -\int_\gamma f(s)\,ds$.
   - ☐ Falls $f = \nabla g$, dann gilt $\int_\gamma f(s)\,ds = 0$.
   - ☐ Sei $a = 0$, $b = 1$ und

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0,1/2), \\ \gamma(1), & t \in [1/2,1] \end{cases},$$

   dann gilt $\int_\gamma f(s)\,ds = \int_\sigma f(s)\,ds$.

2) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Bestimme das Wegintegral

$$\int_\gamma f(s)\,ds,$$

für folgende f und γ:

a)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix},\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 3t+1 \\ t \end{pmatrix},$$

b)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ -2 \end{pmatrix},\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

c)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix},\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

3) Berechne die Arbeit der folgenden Vektorfelder f entlang der Kurven C. Bestimme zudem jeweils den (maximalen) Definitionsbereich des Vektorfeldes f.

a)
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y + 2 \end{pmatrix}$$
und $C \subseteq \mathbb{R}^2$ der Viertelkreisbogen, zentriert im Ursprung, von $(4, -4)$ nach $(4, 4)$.

b)
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x \ln(y) \\ \frac{x^2}{2y} \end{pmatrix}$$
und $C \subseteq \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit Ecken $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, positive orientiert.[1]

c)
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$
und $C \subseteq \mathbb{R}^2$ der Kreis um den Ursprung mit Radius $r > 0$.

4) Finde für die unteren Vektorfelder f einen geschlossenen Weg $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3$,[2] so dass $\int_\gamma f(s)\, ds \neq 0$.

a)
$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z - y \\ x - z \\ y - z \end{pmatrix},$$

b)
$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y - z \\ x - y \end{pmatrix}.$$

[1] Sprich im Gegenuhrzeigersinn.
[2] Hier bedeutet dies $\gamma(0) = \gamma(1)$.