D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlösung Serie 1	FS 2021

1) Seien $f_1, \dots, f_d \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ definiert als

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x))\,.$$

a) Zeige, dass falls ein $i \in \{1, \dots, d\}$ existiert, so dass f_i injektiv ist, dann folgt dass f injektiv ist.

b) Sei $d \geq 2$. Finde ein Beispiel, für welches sämtliche f_i surjektiv sind, aber f *nicht* surjektiv ist.

Proof. Für a) betrachten wir zwei Punkte $x \neq y$ in $\mathbb{R}$ mit f_i injektiv. Dann gilt aber

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_d(x)) \neq (f_1(y), \dots, f_i(y), \dots, f_d(y)),$$

da $f_i(x) \neq f_i(y)$. Dies beweist, dass f injektiv ist.

Für b) wählen $f_1(x) = \cdots = f_d(x) = x$. Dann sind alle f_i surjektiv, aber f nicht: das Bild von f ist gegeben durch

$$\{(x, \dots, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d,$$

somit ist zb $(1, 2, 3, \dots, d) \in \mathbb{R}^d$ *nicht* im Bild von f.

□

2) Sei $f = (f_1, f_2) \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Skizziere das Bild von f, i.e.

$$\left\{ (f_1(t), f_2(t)) \,\middle|\, t \in [0,1] \right\},$$

für

a) $f(t) = (t, t^2)$,

b) $f(t) = (t \sin(2\pi t), \cos(2\pi t))$,

c) $f(t) = (e^t, \frac{1}{1+t^2})$.

Lösung: a) Wir setzen $x = t$ und $y = t^2$. Dann kann man das Bild von f in der x, y-Ebene darstellen als den Graphen von $g(t) = t^2$.

b) Für $h(t) = (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t))$ erhält man einen Kreis mit Radius 1 in der x, y-Ebene da $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Da aber $f_1(t) = t \cdot \sin(2\pi t)$ und $f_1 \leq h_1$, beschreibt das Bild von f eine Spirale innerhalb des Einheitskreises die immer grösser wird und nach einer Drehung (sprich bei $t = 1$) den Punkt $(1, 0)$ erreicht.

c) Bei $t = 0$ gilt $f(0) = (1, 1)$. Ausserdem ist f_1 strikt monoton steigend und f_2 strikt monoton fallend mit $f(1) = (e, 1/2)$. Das Bild von f ist also ein Weg von $(1, 1)$ zu $(e, 1/2)$ der in x-Richtung monton wächst und y-Richtung monoton fällt.

$\square$

3) Welche der folgenden Gleichung definiert eine ODE?[1] Welche sind linear? Welche sind linear und homogen?

a) $f'(x) = f(ax + b)$,
b) $y^3 = y'' \cdot y'$,
c) $y'' + \sin(y)y = x^3$,
d) $y' = \sin(x)$,
e) $y^{(3)} + 2y' + y = 0$.

Lösung: a) ist keine ODE, ausser $a = 1$ und $b = 0$ – dann definiert a) nämlich eine lineare homogene ODE. b) ist eine ODE, aber nicht linear wegen der dritten Potenz, c) ist nicht linear aufgrund des sin-Terms, d) ist eine linear ODE, aber nicht homogen (sin-Term auf der rechten Seite) und e) ist linear und homogen. $\square$

4) Finde jeweils eine (einfache) lineare ODE, für welche f eine Lösung ist:

[1] ODE steht für "ordinary differential equation", sprich, "Gewöhnliche Differentialgleichung".

a) $f(x) = e^{x^2}$,

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$,

c) $f(x) = \sin(x)^{10}$.

Lösung: Die Idee für alle 3 Teilaufgaben ist es erstmal die Funktion abzuleiten. Wir beginnen mit a) und berechenen

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}.$$

Insbesondere ist f eine Lösung der linearen Differentialgleichung:

$$y'(x) + y(x) = (2x + 1) \cdot e^{x^2}.$$

Für b)

$$f'(x) = -\frac{1}{(1 + x^3)^2} \cdot 3x^2,$$

und somit ist f eine Lösung der Gleichung

$$y'(x) + y(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{(1 + x^3)^2}.$$

Für c) haben wir

$$f'(x) = 10 \sin(x)^9 \cdot \cos(x),$$

und f ist eine Lösung von

$$y'(x) + y(x) = \sin(x)^{10} + 10 \sin(x)^9 \cos(x).$$

$\square$