D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlösung Serie 10	FS 2021

Hinweis: Während der ganzen Serie darf Satz 3.24 aus den Handnotizen verwendet werden.

1) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ eine C^1 Funktion, $\gamma\colon [a,b] \to X$ ein parametrisierter Weg. Kreuze die richtigen Aussagen an:

   ☐ Falls $g\colon X \to \mathbb{R}$ ein Potential von f ist, dann ist für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ auch $h := g + C$ ein Potential von f.

   Wahr.

   ☐ Das Vektorfeld f ist genau dann konservativ, wenn f ein Potential g besitzt.

   Wahr: jedes Gradientenvektorfeld ∇g is konservativ und die Umkehrung gilt ebenfalls, siehe Satz 3.15 aus der Vorlesung

   ☐ Falls X sternförmig ist, dann ist f konservativ.

   Falsch: Im allgemeinen erfüllt f nicht die Symmetrie Bedingung $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, welche unabhängig von X ist.

   ☐ Falls für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die Gleichung $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ gilt, dann ist f konservativ.

   Falsch: Ein explizites Gegenbeispiel ist gegeben durch

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

   Die Symmetrie ist erfüllt, aber man kann Nachrechnen, dass das Wegintegral von f entlang des geschlossenen Weges $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),\ t \in [0, 2\pi]$ nicht 0 ist, und somit f nicht konservativ ist (cf. Lemma 3.14).

   ☐ Seien $A_1, \ldots, A_m \subseteq X$ offen mit $\bigcup_{k=1}^m A_k = X$. Falls $f|_{A_k}$ für alle $k = 1, \ldots, m$ konservativ ist, dann ist f konservativ.

   Falsch: Sei f wie im Gegenbeispiel oben. Seien $A_0, \ldots, A_3$ offene Mengen in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die jeweils einen der vier Quadranten überdecken. Wenn man A_i richtig wählt, dann ist A_i sternenförmig, und somit $f|_{A_i}$ konservativ für alle $i = 0, \ldots, 3$ (cf. Satz 3.24). Aber, wie oben gesehen, ist f auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht konservativ.

2) Entscheide, ob folgende Vektorfelder $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ein Potential besitzen:

Wertebereich	**Vektorfeld**	**Ja**	**Nein**
$X = \mathbb{R}^2$	$f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$	☐	☒
$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$	$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$	☐	☒
$X = \mathbb{R}^2$	$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$	☐	☒
$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$	$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^z \sin(z) x \\ 0 \\ \frac{1}{2} x^2 e^z (\cos(z) + \sin(z)) \end{pmatrix}$	☒	☐

3) Kreuze, für die folgenden Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, die richtigen Eigenschaften an:

	Wegzshg.	**Konvex**	**Sternenförm.**
$X = \mathbb{R}^2$	☒	☒	☒
$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0} \times (0,1)$	☒	☒	☒
$X = (-1,1)^2 \setminus \{(0,0)\}$	☒	☐	☐
$X = (0,1) \cup (2,3)$	☐	☐	☐
$X = (\{0\} \times (-1,1)) \cup ((-1,1) \times \{0\})$	☒	☐	☒

4) Betrachte das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die parametrisierten Wege

$$\gamma_1,\ \gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_1(t) := (t,t,t),\ \gamma_2(t) := (t,t^2,t^3).$$

Berechne

$$\int_{\gamma_i} f(s)\, ds, \quad i = 1,2,$$

und schliesse, dass f nicht konservativ ist.

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(s)\,ds &= \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \cdot (1,1,1)\,dt \\
&= \int_0^1 t^2 + t^2 + 1\,dt \\
&= 1 + 2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} f(s)\,ds &= \int_0^1 f(\gamma_2(t)) \cdot (1,2t,3t^2)\,dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1,2t^2,3t^2)\,dt \\
&= \int_0^1 3t^2 + t^4 + 2t^5\,dt \\
&= \left[t^3\right]_{t=0}^{t=1} + \left[\frac{1}{5}t^5\right]_{t=0}^{t=1} + 2\left[\frac{1}{6}t^6\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{15+3+5}{15} \\
&= \frac{23}{15}.
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\int_{\gamma_1} f(s)\,ds \neq \int_{\gamma_2} f(s)\,ds,$$

aber γ_1 und γ_2 haben die selben Endpunkte, was also bedeutet, dass (per Definition) f nicht konservativ ist.

$\square$

5) Sei

$$f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=\begin{pmatrix} yze^{xyz}+1\\ xze^{xyz}+\frac{1}{y}\\ xye^{xyz}\end{pmatrix}.$$

Bestimme, ob f konservativ ist. Falls ja: finde ein zugehöriges Potential.

Lösung: Die notwendige Symmetriebedingung aus Satz 3.19 ist schnell überprüft. Das Vektorfeld f kann ohne Probleme auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetig erweitert werden. Satz 3.24 besagt dann, weil $\mathbb{R}^2$ sternenförmig ist, dass f auf $\mathbb{R}^2$ ein Potential $g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ besitzt. Dann ist aber g eingeschränkt auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ auch ein Potential für f auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

Nun versuchen wir ein Potential $g\colon \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ von f zu bestimmen. Es muss gelten:

$$\nabla g(x)=f(x),$$

und somit

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)&=f_1(x,y,z)=yze^{xyz}+1\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)&=f_2(x,y,z)=xze^{xyz}+\frac{1}{y}\\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)&=f_3(x,y,z)=xye^{xyz}.\end{aligned}$$

Nach Integration der ersten Gleichung und Verwendung des Fundamentalsatzes der Analysis erhalten wir

$$g(x,y,z)=e^{xyz}+x+g_1(y,z),$$

für eine Glatte Funktion g_1. Wir leiten diese Gleichung nach y ab, verwenden die obige Relation zu f_2:

$$xze^{xyz}+\frac{1}{y}=\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=xze^{xyz}+0+\frac{\partial g_1}{\partial y}(y,z)$$

und wie vorhin erhalten wir mit dem Fundamentalsatz der Analysis

$$g_1(y,z)=\ln(y)+g_2(z).$$

Selbiges Spiel wie vorhin ergibt:

$$xye^{xyz}=\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=xye^{xyz}+0+\frac{\partial g_1}{\partial z}(z,y)=xye^{xyz}+\frac{\partial g_2}{\partial z}(z)$$

und deshalb können wir

$$g_2(z)=0$$

setzen. Zusammengefasst haben wir nun ein g der Form

$$g(x,y,z) = e^{xyz} + x + \ln(y).$$

bestimmt.[1]

Bemerkung: Streng genommen hätten wir Satz 3.24 nicht gebraucht um g zu bestimmen. Es ist aber a priori nicht einfach zu sehen, ob ein Potential wirklich existiert oder man im Algorithmus einen Fehler gemacht hat.

$\square$

6) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz \\ 2yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

und sei

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \gamma(t) := \left(\frac{\sin(\pi/2 \cdot t)10^t}{t^3 + 3t^2 + 1}, 2t^4 \cos(2\pi t)^3, 2t \right).$$

Berechne das Wegintegral

$$\int_\gamma f(s)\, ds.$$

Lösung: Der Trick hier ist, zuerst zu zeigen, dass f konservativ ist, damit wir einen einfacheren Weg γ_0 wählen können, um das Wegintegral zu berechnen: tatsächlich sind die Notwendigen Symmetrien erhalten und weil $\mathbb{R}^3$ sternenförmig ist, können wir mithilfe von Satz 3.24 schliessen, dass f konservativ ist.

Die Endpunkte vom Weg γ sind gegeben durch

$$\gamma(0) = (0,0,0),\ \gamma(1) = (10/5, 2, 2) = (2,2,2).$$

Deshalb definieren wir den Weg

$$\gamma_0\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma_0(t) = (t,t,t).$$

Damit berechnen wir

[1] Sanity check: $\nabla g(x,y,z)$ ist tatsächlich f – wir haben uns also nicht verrechnet!

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(s)\,ds &= \int_{\gamma_0} f(s)\,ds \\
&= \int_0^2 \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 2t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \cdot (1,1,1)\,dt \\
&= 6 \cdot \int_0^2 t^2\,dt \\
&= 6 \cdot \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=2} \\
&= 2^4 \\
&= 32.
\end{aligned}$$

$\square$