1) Seien A, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Mengen und χ_A, $\chi_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die dazugehörigen Charakteristischen Funktionen.[1] Kreuze die richtigen Aussagen an.

   - ☐ $\chi_{A \bigcap B} = \chi_A \cdot \chi_B$,
     Wahr.
   - ☐ $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$,
     Falsch.
   - ☐ $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_B$ falls $B \subseteq A$,
     Wahr.
   - ☐ $\chi_A \leq \chi_B$ falls $B \subseteq A$,
     Falsch: Die umgekehrte Ungleichung stimmt jedoch.
   - ☐ $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$.
     Wahr.

2) Sei $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$, $B \subseteq A \subseteq R$ und $f \colon R \to \mathbb{R}$ beschränkt. Kreuze die richtigen Aussagen an.

   - ☐ Die Funktion $g(x, y) = e^x$ auf R (wie oben) ist integrierbar.
     Wahr.
   - ☐ Falls f positiv und integrierbar auf A ist, dann gilt $\int_A f(x, y)\, d(x, y) \geq 0$.
     Wahr.
   - ☐ Falls f auf B und A integrierbar ist, dann gilt $\int_B f(x, y)\, d(x, y) \leq \int_A f(x, y)\, d(x, y)$
     Falsch: Falls f positiv auf A (und somit auch B) ist, stimmt die Aussage, ist aber im Allgemeinen falsch.
   - ☐ Es gilt $\int_R \chi_{A \setminus B}(x, y)\, d(x, y) = \int_A d(x, y) - \int_B d(x, y)$
     Wahr: Dies folgt aus der Definition des Integrales und Aufgabe 1.

[1] Zur Erinnerung: $\chi_A(x) = 1$ falls $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$ falls $x \notin A$.

3) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Seien

$$\begin{aligned} Y &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x > 0\big\} \\ Z &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, y > 0\big\} \\ U &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x < 0\big\} \\ T &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, y < 0\big\}. \end{aligned}$$

Berechne Potentiale g_Y, g_Z, g_U, g_T, so dass zudem

$$g_Z\big|_{Z\bigcap Y} = g_Y\big|_{Z\bigcap Y},\ g_U\big|_{U\bigcap Z} = g_Z\big|_{U\bigcap Z},\ g_T\big|_{T\bigcap U} = g_U\big|_{T\bigcap U}.$$

Berechne $g_T - g_Y$ auf $T \bigcap Y$. Erkläre die Relation zum Wegintegral

$$\int_\gamma f(s)\,ds,$$

wobei γ den Einheitskreis mit Zentrum $(0,0)$ bezeichnet.

Lösung: Der erste Teil der Aufgabe ist fast schon vollständig in der Vorlesung gelöst worden (siehe Ende von Woche10 Teil 4 auf der Metaphor Seite). Zur Erinnerung: für $t > 0$ gilt die Relation

$$\arctan(-1/t) = \arctan(t) - \pi/2,$$

und für

$$g_Y\colon Y \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \arctan(y/x),\ \bar{g}_Z\colon Z \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \arctan(-x/y)$$

erhalten wir

$$\nabla g_Y(x,y) = f(x,y), \nabla \bar{g}_Z(x,y) = f(x,y),$$

wobei hier (x,y) im jeweiligen Definitionsbereich von g_Y bzw. g_Z liegt, und

$$\bar{g}_Z(x,y) - g_Y(x,y) = -\pi/2, \quad \forall (x,y) \in Y \cap Z.$$

Für

$$g_Z := \bar{g}_Z + \pi/2$$

erhalten wir die gewünschte Gleichung und es lässt sich ein Potential g auf $Z \cup Y$ definieren.

Jetzt definieren wir

$$\bar{g}_U \colon U \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \arctan(y/x).$$

Ähnlich wie oben gilt auf $U \cap Z$ (weil $y > 0$, $x < 0$):

$$\begin{aligned}\bar{g}_U(x,y) &= \arctan(y/x)\\ &= \arctan(-x/y) - \pi/2\\ &= \bar{g}_Z(x,y) - \pi/2\\ &= g_Z(x,y) - \pi.\end{aligned}$$

Wir definieren also

$$g_U := \bar{g}_U + \pi$$

und erhalten damit die zweite gewünschte Gleichung. Damit lässt auch das Potential $g\colon Z \cup Y \to \mathbb{R}$ auf $U \cup Z \cup Y$ erweitern.

Nun setzen wir

$$\bar{g}_T \colon T \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \arctan(-x/y),$$

und erhalten ähnlich wie oben für $(x,y) \in T \cap U$ (weil $y < 0$ und $x < 0$):

$$\begin{aligned}\bar{g}_T(x,y) &= \arctan(-x/y)\\ &= \arctan(y/x) - \pi/2\\ &= \bar{g}_U(x,y) - \pi/2\\ &= g_U(x,y) - \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Wir wählen also

$$g_T := \bar{g}_T + \frac{3\pi}{2}.$$

Für $(x,y) \in T \cap Y$ (weil $x > 0$ und $y < 0$) folgt mit einem analogen Argument:

$$\begin{aligned}g_T(x,y) - g_y(x,y) &= \arctan(-x/y) + \frac{3\pi}{2} - \arctan(y/x)\\ &= \arctan(-x/y) + \frac{3\pi}{2} - (\arctan(-x/y) - \pi/2)\\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Wir können nun g_Y nicht umdefinieren, so dass g_Y gleich g_T aut $T \cap Y$ ist, ohne die vorherigen Gleichungen zu verletzen. Dies bedeutet, dass wir mit dieser Methode kein globales Potential finden. Dies lässt sich auch durch die Berechnung des gewünschten Wegintegrales feststellen:

Die Kurve γ kann beschrieben werden durch

$$\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Ähnlich wie in der Musterlösung zu Serie 9 haben wir

$$f(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

und somit

$$\int_\gamma f(s)\,ds = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \quad dt = 2\pi.$$

Dies stimmt genau mit dem Wert $g_T - g_Y = 2\pi$ überein.

$\square$

4) Sei $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (x,y) = \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2l-1}{2^n}\right) \text{ für } k,\ l \in \mathbb{N} \text{ und } n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, anhand von Ober- und Untersummen, dass f nicht integrierbar ist.

Beweis: Seien

$$P_x\colon x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_r = 1,$$
$$P_y\colon y_0 = 0 < y_1 < \cdots < y_s = 1.$$

Es gibt ein N (abhängig von der obigen Partition), so dass es für jedes Rechteck I_{ij} natürliche Zahlen k, l gibt, so dass

$$\left(\frac{2k-1}{2^N}, \frac{2l-1}{2^N}\right) \in I_{ij}.$$

Dies kann man wie folgt einsehen: an den Mittelpunkten der Quadrate

$$C_{k,l}^N := \left[\frac{2(k-1)}{2^N}, \frac{2k}{2^{N-1}}\right] \times \left[\frac{2(l-1)}{2^N}, \frac{2l}{2^{N-1}}\right], \quad k,l \in \mathbb{N}.$$

ist f per Definition gleich 1. Diese Quadrate haben Fläche $2^{-(N+1)}$ und decken das ganze Quadrat $[0,1]^2$ ab. Deshalb enthält jedes Rechteck I_{ij}, für N gross genug, eins dieser $C_{k,l}^N$ Quadrate, i.e.

$$\forall i,j\, \exists k,l \in \mathbb{N} : C_{k,l}^N \subseteq I_{ij}.$$

Dies beweist also, dass für jeder Partition (P_x, P_y) die Obersumme $S(P_x, P_y)$ von unten mit 1 beschränkt ist – explizit:

$$S(P_x, P_y) = \sum_i \sum_j F_{ij}\mu(I_{ij}) \geq \sum_{ij} \mu(I_{ij}) = 1.$$

Für die Untersumme $s(P_x, P_y)$ beobachten wir, dass f auf $A := ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0,1] \cap \mathbb{Q})$ gleich 0 und dass A dicht in $[0,1]^2$ liegt. Da jedes Quadrat I_{ij} das offene Quadrat $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$ enthält, hat A nichtrivialen Schnitt mit I_{ij} für alle Paare (i,j). Also gilt

$$s(P_x, P_y) = 0.$$

Zusammengefasst haben wir:

$$\sup_{(P_x,P_y)} s(P_x, P_y) = 0 < 1 = \sup_{(P_x,P_y)} S(P_x, P_y).$$

Das bedeutet, dass f nicht integrierbar ist.

$\square$

b) Zeige, dass für alle $x \in [0,1]$ die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar ist mit

$$\int_0^1 f(x,y)\, dy = 0$$

und somit $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = 0$.

Proof. Wir Menge aller Zahlen in $[0,1]$, die als $\frac{2l-1}{2^n}$ geschrieben werden können ist ist $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ enthalten. Somit erhalten wir, unabhängig vom fixierten x:

$$0 \leq f(x, \cdot) \leq \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}.$$

Insbesondere gilt

$$\int_0^1 f(x,y)\, dy \leq \int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}}\, dy \leq 0,$$

wobei wir im letzten Schritt ein Resultat aus Analysis I verwendet haben.

$\square$