D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlösung Serie 12	FS 2021

1) Kreuze für $P \subseteq X$ richtig an:

$P \subseteq X$ Nullmenge?	**Ja**	**Nein**
$X = [0,5]^2,\ P = (\{0,1\} \cup [2,3]) \times [1,2]$	☐	☒
$X = [0,1]^2,\ P = [0,1] \times \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$	☒	☐
$X = [-1,1]^2,\ P = \{0\} \times [-1,1]$	☒	☐
$X = [-10,10]^2,\ P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{\frac{1}{n^2}}((\frac{1}{n},0))$	☐	☒.

2) Sei $\varphi \colon D \to \mathbb{R}^2$. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ Für $D = [-2,2]$ und φ Lipschitz, ist das Bild $\varphi([0,1])$ eine Nullmenge.

  Wahr: Dies ist Lemma 3.33 aus den Vorlesungsnotizen.

- ☐ Die Menge $\left\{(x, e^x) \,\middle|\, x \in [0,1]\right\} \subseteq [0,1]^2$ ist keine Nullmenge.

  Falsch: Die Funktion $f \colon x \mapsto e^x$ auf $[0,1]$ ist Lipschitz-stetig (e.g. Lipschitz-Konstante $\max_{x\in[0,1]} f'(x) = e^1$).

- ☐ Seien $\psi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} = D$ und φ stetig. Dann ist die Verkettung $\varphi \circ \psi$ integrierbar auf $[-1,1]^2$.

  Wahr: $\varphi\circ\psi$ ist wieder stetig, und $[-1,1]^2$ ist ein kompaktes Rechteck, deshalb ist Satz 3.30 anwendbar.

3) Zeige, dass der Sierpinski-Teppich eine Nullmenge ist.

Beweis: Sei $D = [0,1]^2$. Wir definieren als D_0 das Quadrat D minus das "mittlere Quadrat" $M_0 := [1/3, 2/3] \times [1/3, 2/3]$. Wir können also D_0 durch 8 "äussere" Quadrate mit Seitenlänge $1/3$ (sprich Fläche $1/3^2$) abdecken abdecken und erhalten somit:

$$\mu(D_0) = \frac{8}{3^2}.$$

Einfacherer hätten wir $\mu(D_0)$ bestimmen können, indem man $\mu(D)$ minus die Fläche von M_0 rechnet, d.h.

$$\mu(D_0) = \mu(D) - \mu(D_0) = 1 - \frac{1}{3^2}.$$

Um $\mu(D_1)$ zu berechnen (wobei D_1 wie im zweiten Iterationsschritt vom Sierpinski-Teppich definiert ist) verwenden wir letztere Taktik und subtrahieren in jedem der 8 Subquadrate das mittlere Quadrat (der Fläche $(1/3^2)^2$) und erhalten somit

$$\mu(D_1) = \mu(D_0) - \frac{8}{3^4} = 1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{8}{9^2}\right) = 1 - \frac{1}{8}\left(\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2}\right).$$

Induktiv lässt sich also zeigen:

$$\mu(D_i) = 1 - \frac{1}{8} \cdot \sum_{j=1}^{i+1} \left(\frac{8}{9}\right)^j = 1 - \frac{1}{8}\left(-1 + \sum_{j=0}^{i+1} \left(\frac{8}{9}\right)^j\right).$$

Mithilfe der endlichen geometrischen Reihe erhalten wir

$$\mu(D_i) = 1 - \frac{1}{8} \cdot \left(-1 + \frac{1 - (8/9)^{i+2}}{1 - 8/9}\right),$$

was für $i \to \infty$ gegen folgenden Ausdruck liefert:

$$1 - \frac{1}{8} \cdot \left(-1 + \frac{1}{1 - 8/9}\right) = 1 - \frac{1}{8} \cdot (-1 + 9) = 0.$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$\lim_{i \to \infty} \mu(D_i) = 0,$$

und somit, dass der Sierpinski-Teppich eine Nullmenge ist.

$\square$

4) Berechne

$$\int_S (1 + x) \sin(y) \, d(x, y),$$

wobei S das Trapezoid mit Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 1)$ bezeichnet.

Lösung: Mit einer Skizze kann man sehen, dass S geschrieben werden kann als

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le \varphi(x),\ x \in [0,1]\right\},\ \varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = x+1.$$

Da der Integrand und φ stetig sind, ist Satz 3.36 anwendbar, i.e.

$$\int_S (1+x)\sin(y)\,d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{\varphi(x)} (1+x)\sin(y)\,dy\right) dx.$$

Letzteres lässt sich mit Methoden aus Analysis I berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^{\varphi(x)} (1+x)\sin(y)\,dy\right) dx &= \int_0^1 (x+1) \int_0^{x+1} \sin(y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 (x+1)\cdot(-\cos(x+1)+\cos(0))\ dx \\
&= \int_0^1 (x+1) - (x+1)\cos(x+1)\,dx \\
&= \int_0^1 x+1\,dx - \int_1^2 s\cdot\cos(s)\,ds \\
&= \frac{1}{2} + 1 - \left([s\cdot\sin(s)]_{s=1}^{s=2} - \int_1^2 \sin(s)\,ds\right) \\
&= \frac{3}{2} - (2\sin(2) - \sin(1) + \cos(2) - \cos(1)) \\
&= \frac{3}{2} + \sin(1) + \cos(1) - 2\sin(2) - \cos(2).
\end{aligned}$$

□

5) Zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[0,R]^2} \sin(x^2+y^2)\,d(x,y)$$

existiert.

Beweis: Da der Integrand stetig ist, können wir Satz 3.36 anwenden:

$$\int_{[0,R]^2} \sin(x^2 + y^2)\, d(x,y) = \int_0^R \int_0^R \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy, \quad \forall R \geq 0.$$

Unter Verwendung der Summationsformel $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^R \int_0^R \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy = &\int_0^R \cos(y^2) \int_0^R \sin(x^2)\, dx\, dy \\ &+ \int_0^R \sin(y^2) \int_0^R \cos(x^2)\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Wir berechnen $\int_0^R \sin(x^2)\, dx$ via der Substitution $x^2 = t$:

$$\int_0^R \sin(x^2)\, dx = \int_0^{R^2} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\, dt.$$

Definiere

$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to [-1,1], \quad f(R) := \int_0^{R^2} \frac{\sin(t)}{2\sqrt{t}}\, dt$$

und analog

$$g(R) := \int_0^{R^2} \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}}\, dx.$$

Wir haben also bisher gezeigt:

$$\int_{[0,R]^2} \sin(x^2 + y^2)\, d(x,y) = f(R) \cdot \int_0^R \cos(y^2)\, dy + g(R) \cdot \int_0^R \sin(y^2)\, dy.$$

Indem wir den vorherign schritt Wiederholen:

$$\int_{[0,R]^2} \sin(x^2 + y^2)\, d(x,y) = f(R) \cdot g(R) + g(R) \cdot f(R) = 2f(R) \cdot g(R).$$

Es reicht also zu zeigen, dass $f(R)$ und $g(R)$ für $R \to \infty$ konvergieren. Wir zeigen dies nur für f weil der Fall für g Analog ist. Wir haben

$$\lim_{R\to\infty} 2f(R) = \int_0^{\pi/2} \sin(t) t^{-1/2}\, dt + \lim_{R\to\infty} \int_{\pi/2}^{R^2} \sin(t) t^{-1/2}\, dt.$$

Das linke Integral existiert, da

$$\int_0^{\pi/2} |\sin(t)t^{-1/2}|\,dt \leq \int_0^{\pi/2} t^{-1/2}\,dt = [2 \cdot t^{1/2}]_{t=0}^{t=\pi/2} \in \mathbb{R},$$

cf. Lemma 5.51 aus dem Analysis I Skript (siehe metaphor Seite hier). Lemma 5.51 ist hier notwendig, da der Integrand bei 0 nicht existiert und somit das Integral als uneigentlich aufgefasst werden muss.

Für den rechten Term berechnen wir via partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{+\infty} \sin(t) \cdot t^{-1/2}\,dt &= \left[\frac{-\cos(t)}{\sqrt{t}}\right]_{t=\pi/2}^{t=\infty} - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{2t^{3/2}}\,dt \\ &= -\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{2t^{3/2}}\,dt.\end{aligned}$$

Aber

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}},$$

wobei letzteres von $\pi/2$ bis $+\infty$ integrierbar ist (mit Stammfunktion $-2 \cdot t^{-1/2}$). Deshalb impliziert Lemma 5.51 widerrum, dass auch $\int_{\pi/2}^{+\infty} \sin(t) \cdot t^{-1/2}\,dt$ existiert. Also haben wir gezeigt, dass $2f(R)$ für $R \to +\infty$ konvergiert, was auch die Konvergenz von $f(R)$ bedeutet, und somit der Beweis beendet ist.

□