1) Kreuze die richtigen Aussagen an:

- ☐ $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ Der Satz von Green besagt $\iint_A F(s)\,ds = \int_{\partial A}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\,d(x,y)$.
- ☐ Die Jacobi Matrix der Abbildung $\Phi(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 \\ ab \end{pmatrix}$ ist für alle $a,\, b \in \mathbb{R}$ invertierbar.
- ☒ Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ definieren keine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$.

2) Berechne folgende Integrale mittels Polarkoordinaten:

a)

$$\int_0^{2a}\left[\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \left(x^2+y^2\right)\,dy\right]dx$$

Lösung. Zuerst betrachten wir, dass der Integrationsbereich eine halbe (obere) Kreisscheibe mit Radius a um $(a,0)$ beschreibt:

$$\begin{aligned} 0 \le y \le \sqrt{2ax-x^2} &\implies y^2 \le 2ax - x^2 \\ &\iff y^2 + x^2 - 2ax + (a^2 - a^2) \le 0 \\ &\iff (x-a)^2 + y^2 \le a^2. \end{aligned}$$

Da gleichzeitig $y \ge 0$ und $0 \le x \le 2a$ gilt, ist der Integrationsbereicht tatsächlich die oben beschriebene Kreisschreibe.

Bevor wir Polarkoordinaten verwenden, zentrieren wir die Scheibe im Urpsung mit dem Koordinatenwechsel

$$\Psi(u,v) = \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix $J_\Psi(u,v)$ ist die Indentitätsmatrix. Mit Satz 3.38 erhalten wir

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{2a^2+2au-u^2-2au-a^2}} (u+a)^2+y^2\,dv\,du = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-u^2}} ((u+a)^2+v^2)\,dv\,du.$$

Jetzt verwenden wir Polarkoordinaten, i.e. den Koordinatenwechsel

$$\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Der Integrationsbereich wird dann $0 \le r \le a$ und $0 \le \theta \le \pi$. Die Determinante der Jacobimatrix $J_\Phi(r,\theta)$ ist r, wie in der Vorlesung gesehen, und erneutes anwenden von Satz 3.38 liefert deshalb:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \int_0^a \left((r\cos(\theta)+a)^2 + r^2\sin(\theta)^2\right)\cdot r\,dr\,d\theta &= \int_0^\pi \int_0^a \left(r^2+2ar\cos(\theta)+a^2\right)\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^a r^3+2a\cos(\theta)r^2+a^2r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{a^4}{4}+\frac{2a\cos(\theta)}{3}a^3+\frac{a^4}{2}\,d\theta \\
&= \frac{3}{4}a^4\pi + \frac{2a^4}{3}\int_0^\pi \cos(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{3}{4}a^4\pi + \frac{2a^4}{3}\cdot(0-0) \\
&= \frac{3}{4}a^4\pi.
\end{aligned}$$

□

b)

$$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,dy\right]dx.$$

Lösung: Hier verwenden wir direkt Polarkoordinaten und Satz 3.38, aber die Integrationsgrenzen müssen zuerst ermittelt werden. Der Bereich (x,y) mit $0 \le x \le 1$ und $x^2 \le y \le x$ ist ein "Halbmond". Dieser kann durch Polarkoordinaten erfasst werden, indem der Winkel θ von 0 bis $\pi/4$ läuft, und die obere Integrationsgrenze vom Radius r in Abhängigkeit von θ bestimmt wird: für $\theta \in [0,\pi]$ soll der Radius r solange laufen, bis die Gerade mit Steigung $\tan(\theta)$[1]

[1] Zur Erinnerung: tan beschreibt Gegenkathete durch Ahnkathete, weshalb $\tan(\theta)$ hier die Steiung der Geraden mit Winkel θ ist.

den “halb Mond” verlässt – dies geschieht genau dann wenn

$$\tan(\theta) \cdot \underbrace{r\cos(\theta)}_{x\text{-Koordinate}} = (r\cos(\theta))^2.$$

Also ist die obere Integrationsgrenze R_θ gegeben durch

$$R_\theta = \frac{\tan(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}.$$

Mit Satz 3.38 folgt also:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\int_{x^2}^x \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\, dy\right] dx &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sin(\theta)/\cos(\theta)^2} \frac{1}{r}\cdot r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}\, d\theta.\end{aligned}$$

Man beachte jetzt, dass $\frac{1}{\cos(\theta)}$ abgeleitet $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}$ ergibt:

$$\left(\frac{1}{\cos(\theta)}\right)' = -\frac{1}{\cos(\theta)^2}\cdot(-\sin(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}.$$

Somit erhalten wir mit dem Fundamentalsatz der Analysis:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}\, d\theta = \frac{1}{\cos(\pi/4)} - \frac{1}{\cos(0)} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2}-1.$$

□

3) Berechne

$$\iint_C x\cdot y\, d(x,y),$$

mittels Variabenwechsel

$$x = u^2 - v^2,\ y = 2uv,$$

wobei

$$C = \left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\right\}.$$

Lösung: Wir verwenden den vorgeschlagenen Variablenwechsel:

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \end{pmatrix}$$

und erhalten die Jacobimatrix

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}.$$

Die Norm der Determinante ist gegeben durch

$$\big|\det J_\Phi(u,v)\big| = 4(u^2 + v^2).$$

Wir beobachten folgendes:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 \\ &= u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 \\ &= (u^2 + v^2)^2. \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir mit Satz 3.38:

$$\iint_C xy d(x,y) = \iint_D (u^2 - v^2) 2uv \cdot 4(u^2 + y^2)\, d(u,v),$$

wobei D aufgrund der obigen Rechnung gegeben ist durch:

$$D = \left\{(x,y) \,|\, u^2 + v^2 \leq 1\right\}.$$

Letzteres Integral ist gleich

$$\iint_D 8 \cdot u^3 v(u^2 + y^2)\, d(u,v) - \iint_D 8 \cdot v^3 u(u^2 + y^2)\, d(u,v).$$

Aufgrund der Symmetrie von D kann man jetzt sehen, dass die beiden Integrale sich gegenseitig wegkürzen – rigoros kann man das zeigen, indem z.B. auf das erste Integral der Koordinatenwechsel

$$\Psi(a,b) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

angewendet wird:

$$J_\Psi(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies |\det J_\Psi(a,b)| = 1.$$

Ausserdem $Psi(D) = D$ und wir erhalten

$$\iint_D 8 \cdot u^3 v(u^2 + y^2)\, d(u,v) = \iint_D 8 \cdot b^3 a(b^2 + a^2) d(a,b).$$

Also haben wir insgesamt gezeigt:

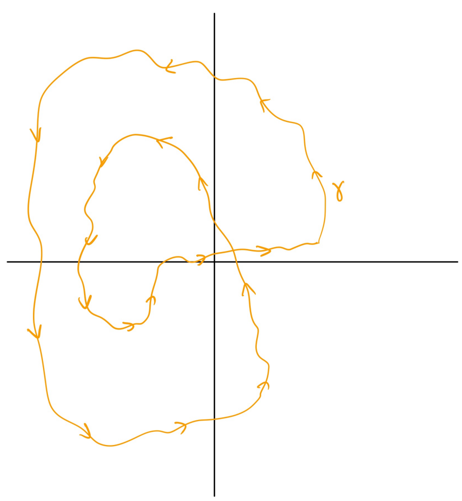
$$\iint_C x \cdot y d(x,y) = 0.$$

$\square$

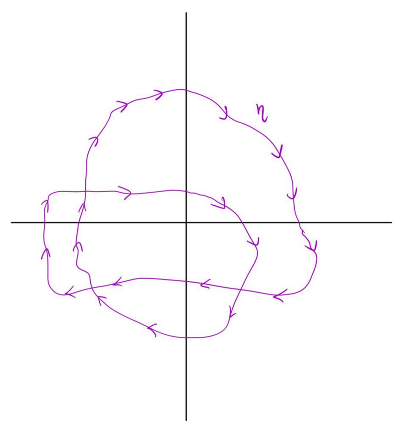
4) Sei

$$F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2}. \end{pmatrix}$$

Berechne das Linienintegral von F über γ und η:



(a) curve γ



(b) curve η

Lösung: Wir verwenden die Umlaufzahl (Anwendung 3.44 in den Handnotizen). Der Trick ist, γ in zwei Jodankurven aufzuspalten, nämlich die "äussere" γ_1 und "innere" γ_2. Wir wissen

$$\int_\gamma F(s)\,ds = \int_{\gamma_1} F(s)\ + \int_{\gamma_2} F(s)\,ds.$$

Es ist aber ersichtlich, dass die innere Kurve γ_1 den Ursprung nicht miteinschliesst und somit Umlaufzahl 0 hat. Ähnlich sieht man, dass γ_2 einmal in positiver Orientierung um den Ursprung läuft. Damit haben wir

$$\int_{\gamma_1} F(s)\,ds + \int_{\gamma_2} F(s)\,ds = 2\pi, \quad i = 0, 1,$$

siehe Seite 217 in den Handnotizen. Und somit

$$\int_\gamma F(s)\,ds = 2\pi.$$

Für den Fall η kann man ähnlich η in zwei Jordankurven aufteilen. Diesemal laufen beide um den Ursprung, und zwar genau einmal, *aber* im Uhrzeigersinn, das heisst die Umlaufzahl ist jeweils -1. Wir erhalten somit

$$\int_\eta F(s),\, ds = -4\pi.$$

$\square$