1) Seien α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Zeige, dass die Funktionen $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{\alpha_1 x}$, $e^{\alpha_2 x}$, $e^{\alpha_3 x}$ linear unabhängig sind.

Beweis: Wir nehmen per Widerspruch lineare Abhängigkeit an, dass heisst es gibt nicht null Koeffizienten ξ_1, ξ_2, $\xi_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass

$$\xi_1 \cdot e^{\alpha_1 x} + \xi_2 e^{\alpha_2 x} + \xi_3 \cdot e^{\alpha_3 x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere

$$e^{\alpha_1 x} = c_2 e^{\alpha_2 x} + c_3 e^{\alpha_3 x},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $c_2 = \xi_2/\xi_1$ und $c_3 = \xi_3/\xi_1$.
Wir wenden auf beiden Seiten den Operator $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_3\right)$ an. Zuerst die linke Seite:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_3\right) e^{\alpha_1 x} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2\right)(\alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \alpha_3 e^{\alpha_1 x}) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2\right)((\alpha_1 - \alpha_3) e^{\alpha_1 x}) \\
&= (\alpha_1 - \alpha_3)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2\right) e^{\alpha_1 x} \\
&= (\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2) e^{\alpha_1 x}.
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_3\right)(c_2 e^{\alpha_2 x} + c_3 e^{\alpha_3 x}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2\right)(c_2(\alpha_2 - \alpha_3) e^{\alpha_2 x} + c_3(\alpha_3 - \alpha_3) e^{\alpha_3 x}) \\
&= c_2(\alpha_2 - \alpha_3)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2\right) e^{\alpha_2 x} \\
&= c_2(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_2) e^{\alpha_2 x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Insbesondere haben wir grad gezeigt, dass

$$(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2) e^{\alpha_1 x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da aber $e^{\alpha_1 x} \neq 0$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$ und $\alpha_1 \neq \alpha_2$ gelten, haben wir einen Widerspruch.

Dies zeigt, dass die gewünschte lineare Unabhängigkeit erfüllt ist.

□

2) Sei $a \in \mathbb{C}$ und b ein Polynom. Zeige, dass es ein Polynom f gibt mit $f' + af = b$.

Beweis: Wir schreiben

$$b(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

Falls $a = 0$ gilt, ist $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{i} x^{i+1}$ eine gültige Wahl. Wir nehmen also an, dass $a \neq 0$.

Das gesuchte Polynom $f(x) = \sum_{i=0} c_i x^i$ hat grad n (wie b), und da f' von grad $n-1$ ist, muss

$$c_n = \frac{b_n}{a}$$

gelten, damit a priori $f' + af = b$ überhaupt gelten kann. Wenn wir wieder von $f' + af = b$ ausgehen, muss auch $c_n n + ac_{n-1} = b_{n-1}$ gelten. Aber c_n wurde bereits bestimmt, also können wir einfach

$$c_{n-1} = b_{n-1} - nb_n$$

setzen. Der Koeffiezient c_{n-2} lässt sich mit ähnlichen Überlegungen bestimmen und nach endlich vielen Schritten sind sämtliche Koeffizienten von f bestimmt, so dass

$$f' + af = b$$

erfüllt ist.

□

3) Bestimme den Raum der Komplexen sowie reellen Lösungen von

$$y'' - 3y' - 4y = 0.$$

Lösung: Das Charakteristische Polynom der obigen Gleichung ist gegeben durch

$$X^2 - 3X - 4 = 0.$$

Einfaches Nachrechnen liefert die Nullstellen

$$\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = 4.$$

Somit ist der (komplexe) Lösungsraum gegeben durch

$$\left\{\xi_1 \cdot y_1 + \xi_2 \cdot y_2 \,\middle|\, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}\right\},$$

wobei $y_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert sind als $y_i(x) = e^{\alpha_i x}$ für $i = 1, 2$ und $x \in \mathbb{R}$.

Da die Nullstellen α_i reell sind, sind auch die y_i reellwertige Funktionen, insbesondere sind die reellen Lösungen der Differentialgleichung reelle Linearkombinationen von y_i, i.e.

$$\left\{c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

□

4) Bestimme eine spezielle Lösung der Gleichung:

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = \cos(\sigma t),$$

wobei $\omega > \lambda > 0$ und $\sigma \neq \omega$.

Lösung: Die DGL hier ist eine Inhomogene. Wir gehen also mit der Methode der "Variation der Koeffizienten" vor. Dazu müssen wir eine Basis der Lösungsmenge der homogenen Gleichung

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = 0$$

finden. Das Charakteristische Polynom ist gegegen durch

$$X^2 + 2\lambda X + \omega^2 = 0.$$

Die Nullstellen sind gleich $-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$, aber $\omega > \lambda$, also sind die Nullstellen komplex und gleich

$$\alpha_1 = -\lambda + i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2},\ \alpha_2 = -\lambda - i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}.$$

Der Lösungsraum der homogonen Gleichung wird aufgespannt durch komplexe Linearkombinationen der Funktionen

$$f_1(t) := e^{\alpha_1 t},\ f_2(t) = e^{\alpha_2 t}.$$

Die Methode der Variation der Konstanten liefert in diesem fall eine allgemeine Lösung der Form

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} -\frac{f_2(s)\cos(\sigma s)}{W(s)}\,ds \cdot f_1(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{f_1(s)\cos(\sigma s)}{W(s)}\,ds \cdot f_2(t),$$

wobei

$$W(s) := f_1(s)f_2'(s) - f_2(s)f_1'(s) = (\alpha_2 - \alpha_1)e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} = 2i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}e^{-2\lambda t} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Wir massieren den ersten Integrand

$$-\frac{f_2(s)\cos(\sigma s)}{W(s)} = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_1 s}\cos(\sigma s)$$

und den zweiten Integrand

$$\frac{f_1(s)\cos(\sigma s)}{W(s)} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{-\alpha_2 s}\cos(\sigma s).$$

Somit, für $t_0 = 0$:[1]

$$f(t) = \frac{f_1(t)}{\alpha_1 - \alpha_2}\int_0^t e^{-\alpha_1 s}\cos(\sigma s)\,ds + \frac{f_2(t)}{\alpha_2 - \alpha_1}\int_0^t e^{-\alpha_2 s}\cos(\sigma s)\,ds.$$

Man kann überprüfen, dass

$$\int_0^t e^{-\alpha_i s}\cos(\sigma s)\,ds = \frac{e^{-\alpha_i t}\cdot(\sigma\sin(\sigma t) - \alpha_i\cos(\sigma t))}{\alpha_i^2 + \sigma^2} + \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2 + \sigma^2}.$$ [2]

Somit erhalten wir

$$f(t) = \frac{(\sigma\sin(\sigma t) - \alpha_1\cos(\sigma t) + \alpha_1 f_1(t))}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1^2 + \sigma^2)} + \frac{(\sigma\sin(\sigma t) - \alpha_2\cos(\sigma t) + \alpha_1 f_1(t))}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2^2 + \sigma^2)}.$$

An dieser Stelle kann man die expliziten α_i von oben Einsetzen. Da es den Ausdruck aber nicht vereinfacht, geben wir uns mit der obigen Form zufrieden.[3]

$\square$

[1] Es ist egal, was für ein t_0 verwendet wird, da der entsprechende Term in der Definition von f als $\xi_1(t_0)f_1(t) + (-\xi_2(t_0))f_2(t)$ erscheint, der für alle t_0 die homogone Gleichung löst. Deshalb ist f für alle t_0 eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

[2] Man kann z.B. $e^{-\alpha_i s}$ in Real- und Imaginärteil aufteilen und das Problem auf das Integrieren von $\sin\cdot\cos$ und $\cos\cdot\cos$ reduzieren.

[3] Wer will kann dies selber versuchen und/oder f als Summe Realteil udn Imaginärteil (mal i) schreiben.