D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Serie 3	FS 2021

1) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ and $x \in \mathbb{R}^n$.

   - ☐ f ist stetig in x, falls es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $f(x_k) \to f(x)$ für $k \to \infty$.

     Falsch: es muss für alle Folgen, die gegen x konvergieren gelten.

   - ☐ $f \circ g$ and $g \circ f$ sind immer definiert.

     Falsch: der Wertebereich von f ist nicht gleich dem Definitionsbereich von g wenn $n \neq m$.

   - ☐ Falls $g \circ f$ und f stetig sind, dann ist auch g stetig.

     Falsch: es gibt viele Gegenbeispiele – man kann f konstant wählen, dann ist auch $g \circ f$ stetig, unabhängig davon wie g definiert ist.

2) Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

   - ☐ $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + 3z$,

     Wahr: Polynome sind stetig.

   - ☐ $f(x, y) = \inf\{x^k + y^k \,\big|\, k \in \mathbb{Z}\}$, für $(x, y) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$,

     Falsch: Es gilt $f(1, 0) = 1$, aber für jedes beliebig kleine $\delta > 0$ gilt $f(1 - \delta, 0) = 0$. Somit ist f nicht stetig bei $(1, 0)$.

   - ☐ $f(x, y) = \inf\{x^k + y^k \,\big|\, k \in \mathbb{Z}\}$, für $0 \leq x,\ y < 1$,

     Wahr: Für diese Wahl von x und y sind alle x^k und y^k und monoton fallend für k steigend mit Grenzwert 0. Insbesondere gilt für (x, y) hier $f(x, y) = 0$.

   - ☐ $f(x, y) = \int_x^y \cos(t)\, dt$, für $x < y$.

     Wahr: Sei $\|(x_0, y_0) - (x_1, y_1)\| < \delta$. Per Definition gilt dann

     $$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 < \delta^2,$$

     insbesondere

     $$|x_0 - x_1| < \delta \text{ und } |y_0 - y_1| < \delta.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle $\delta > 0$ so, dass $|\sin(t_0) - \sin(t_1)| < \varepsilon/2$ für $|t_0 - t_1| < \delta$. Mit dieser Wahl von δ und (x_i, y_i) wie oben erhält man nach Integration und Anwendung der Dreiecksungleichung:

$$\|f(x_0, y_0) - f(x_1, y_1)\| < |\sin(y_0) - \sin(y_1)| + |\sin(x_0) - \sin(x_1)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

3) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert wie folgt:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeige, dass f stetig ist.

Beweis: Für $(x,y) \neq 0$ ist $f(x,y)$ eine Verkettung stetiger Funktionen und somit stetig. Es bleibt also zu zeigen, dass f bei $(0,0)$ stetig ist. Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta,$$

wobei $\delta > 0$ in Kürze gewählt wird. Man beobachte, dass

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| = |xy| \cdot \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leq |xy| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = |xy|.$$

Aber $0 \leq x^2$, $y^2 < \delta$ und somit gilt $|xy| < \delta$. Wenn wir also ein beliebiges $\varepsilon > 0$ wählen und dann $\delta = \varepsilon$ setzten, dann haben wir gezeigt, dass

$$\|(x,y) - (0,0)\| < \delta \implies |f(x,y) - f(0,0)| \leq |xy| < \varepsilon,$$

was Stetigkeit von f bei $(0,0)$ beweist.

$\square$

4) Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und y in $\mathbb{R}^n$:

$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige folgende Äquivalenz:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = y \iff \forall 1 \leq j \leq n\colon \lim_{k\to\infty} x_{k,j} = y_j.$$

Beweis: Wir arbeiten mit der Definition und zeigen die " $\implies$ " Richtung: Es gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = y$ genau dann wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt so dass

$$\|x_k - y\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq N(\varepsilon),$$

gilt. Wenn wir die Definition der Norm ausschreiben

$$\|x_k - y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - y_j|^2} < \varepsilon,$$

sehen wir (nach quadrieren der obigen Ungleichung), dass für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt $|x_{k,j} - y_j|^2 < \varepsilon^2$, insbesondere:

$$\forall j = 1, \ldots, n,\ \forall k \geq N(\varepsilon) : |x_{k,j} - y_j| < \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass die reellen folgen $(x_{k,j})_{k\in\mathbb{N}}$ alle gegen y_j in $\mathbb{R}$ konvergieren.

Die andere Richtung erhält man indem das obige Argument rückwärts liest.

□

5) Zeige, dass das kartesische Produkt von stetigen Abbildungen stetig ist, das heisst: falls $f_i\colon \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{m_i}$ für $i = 1, 2$ stetig sind, dann ist

$$f := (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}^{m_1+m_2}$$

stetig.

Beweis: Wir arbeiten mit der Definition und beobachten zuerst, dass falls $x, u \in \mathbb{R}^{n_1}$ und $y, v \in \mathbb{R}^{n_2}$, dann gilt für die Vektoren (x, y), $(y, v) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$

$$\begin{aligned}
\|(x,y)-(u,v)\|^2 &= \|(x-u, y-v)\|^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-u_i)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(y_j-v_j)^2\right) \\
&= \|x-u\|^2 + \|y-v\|^2 \\
&\leq \left(\|x-u\| + \|y-v\|\right)^2.
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta_i > 0$, so dass

$$\|x-u\| < \delta_1,\ \|y-v\| < \delta_2 \implies \|f_1(x)-f_1(u)\| < \varepsilon/2 \text{ und } \|f_2(y)-f_2(v)\| < \varepsilon/2.$$

Definiere $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$. Falls wir dann (x, y) und (u, v) betrachten mit

$$\|(x,y)-(u,v)\| < \delta/2,$$

erhalten wir $\|x-u\| < \delta_1$ und $\|y-v\| < \delta_2$ von der ersten Rechnung oben, und somit erhalten wir (mit einer ähnlichen Rechnung wie zuvor und Wahl von δ, δ_i):

$$\begin{aligned}
\|f(x,y)-f(u,v)\|^2 &= \|(f_1(x), f_2(y)) - (f_1(u), f_2(v))\|^2 \\
&\leq \left(\underbrace{\|f_1(x)-f_1(u)\|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\|f_2(y)-f_2(v)\|}_{\varepsilon/2}\right)^2 \\
&< \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Wurzelziehen liefert die gewünschte Ungleichung und beweist, dass das kartesische Produkt $f = (f_1, f_2)$ stetig ist.

$\square$