D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlsung Serie 4	FS 2021

1) Kreue die richtigen Eigenschaften an:

	Beschr.	**Abgeschl.**	**Kompakt**
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3 < 2021\}$	☐	☐	☐
$\{(x,g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ g(x) = 3x^2\}$	☒	☒	☒
$\{(x,g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\pi/2,\pi/2),\ g(x) = \tan(x)\}$	☐	☒	☐
$\{(\cos(\alpha),\sin(\alpha)) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$	☒	☒	☒
$\{(k,0,0) \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \mathbb{Z} \cap [0,2021]\}$	☒	☒	☒
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1]\}$	☐	☒	☐

2) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ Sei $\mathrm{pr}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}(x,y) := x$ und $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen. Dann ist auch $\mathrm{pr}(A) \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen.

  Falsch: Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Dann ist A abgeschlossen[1] und $(x_n,y_n) = (1/n,n)$ ist eine Folge in A, aber $\mathrm{pr}(x_n,y_n) = 1/n$ konvergiert gegen 0 in $\mathbb{R}$, was nicht enthalten ist in $\mathrm{pr}(A)$.

- ☐ Falls $A \subseteq \mathbb{R}^n$ geschlossen ist, dann ist $A^c = X \setminus A$ offen.

  Wahr: Wurde in der VL gezeigt.

- ☐ Die Menge $O \subseteq \mathbb{R}^n$ is offen genau dann wenn O nicht abgeschlossen ist.

  Falsch:[2] Eine Menge kann sowohl offen, als auch abgeschlossen sein, zum Beispiel $\mathbb{R}$ (als Unterraum von $\mathbb{R}$), oder die leere Menge $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$.

- ☐ Sei $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt.

  Wahr: Siehe Min-Max Resultat aus der Vorlesung.

- ☐ Sei $f\colon [-1,1]^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt.

  Falsch: Sei $f(x_1,\ldots,x_n) := 1/x_1$. Dann ist f stetig, aber fr eine Nullolge $(x_{k,1},x_{k,2},\ldots,x_{k,n})_{k\in\mathbb{N}} = (x_k) \subseteq [-1,1]^n \setminus \{0\}$ erhalten wir

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{x_{k,1}} = +\infty.$$

[1] Übungs: wieso?

[2] Niemand wird Mathematiker:in ohne diesen Fehler mal gemacht zu haben.

3) Berechne folgende partielle Ableitungen:

a) $\partial_2 f(x)$ und $\partial_3 f(0,1,3)$ wobei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1 x_2 x_3}.$$

Lsung: Für $x = (x_1,x_2,x_3)$ erhalten wir

$$\partial_2 f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1 \cdot x_3 \cdot e^{x_1 x_2 x_3}, \quad \partial_3 f(x) = x_1 \cdot x_2 \cdot e^{x_1 x_2 x_3},$$

und somit auch

$$\partial_3 f(0,1,3) = 0.$$

□

b) $\partial_2 g_2(x)$ und $\partial_1 g_1(0,0)$ wobei

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_1 x_2) e^{x_1+x_2} \\ \sin(x_1 x_2) \end{pmatrix}.$$

Lsung: Ähnlich wie in a) erhalten wir für $g_1(x) = \cos(x_1 x_2) e^{x_1+x_2}$ und $g_2(x) = \sin(x_1 x_2)$:

$$\partial_2 g_2(x) = x_1 \cos(x_1 x_2), \quad \partial_1 g_1(x) = -x_2 \sin(x_1 x_2) e^{x_1+x_2} + \cos(x_1 x_2) e^{x_1+x_2},$$

und deshalb

$$\partial_1 g_1(0,0) = 1.$$

□

4) Berechne die Jacobimatrizen $J_f(x)$ der folgenden Funktionen:

a)

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

Lsung: Weil f nach $\mathbb{R}$ geht, wird die Jacobimatrix die Form eines Reihenvektors annehmen, nämlich

$$J_f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \ldots, \partial_n f(x)).$$

Wir müssen also sämtliche partielle Ableitungen $\partial_i f(x)$ bestimmen – diese sind gegeben durch

$$\partial_i f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 2x_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Wir schliessen also

$$J_f(x) = (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n) = 2 \cdot x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$\square$

b)

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_1) \\ \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

Lsung: Hier wird die Jacobimatrix eine 2×2 Matrix darstellen. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1(x_1, x_2) &= -\sin(x_1), \\ \partial_2 f_1(x_1, x_2) &= 0, \\ \partial_1 f_2(x_1, x_2) &= \cos(x_1 + x_2), \\ \partial_2 f_2(x_1, x_2) &= \cos(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Wir fassen also zusammen:[3]

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1) & 0 \\ \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

$\square$

[3]Folgendes hilft, um nicht Zeilen und Reihen zu verwechseln: die erste *Spalte* der Jacobimatrix ist "$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ nach x_1 abgeleitet", weil $J_f(x)e_1$ die "Änderung" von f in x_1-Richtung misst.