1) Berechne $df(x_0)\,[v]$ für

a) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 3,\ v = 5,$

Lösung:

$$df(x)[w] = 2 \cdot x \cdot w, \quad x, w \in \mathbb{R},$$

und deshalb

$$df(x_0)[v] = 30.$$

□

b) $f(x, y) = \cos(x)^2 \cdot y, \quad x_0 = (\pi/4, 1),\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

Lösung:

$$df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin(x)y & \cos(x)^2 \end{pmatrix}.$$

Wir können das Einsetzen von x_0 im ersten Eintrag der Matrix ersparren[1], da diese mit v multipliziert ist und $v_x = 0$. Wir haben also

$$df(x_0)[v] = \cos(\pi/4)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

□

c) $f(x, y, z) = e^x \ln(y) + z, \quad x_0 = (0, 1, 0),\ v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Lösung:

$$\begin{aligned} df(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^x \ln(y) & e^x/y & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und somit

$$df(x_0)[v] = -e^0 \ln(1) + 0 \cdot e^0/1 + 1 = 1$$

□

[1] Deshalb hätte man sich streng genommen auch das Ausrechnen der ersten partiellen Ableitung schenken können.

2) Seien

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ zy^2 \end{pmatrix}$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x,y) := \begin{pmatrix} xy \\ e^{x+y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Jacobi-Matrix $J_{f\circ g}(x_0)$ an der Stelle $x_0 = (2,1)$.

Lösung: Aus Satz 2.35 wissen wir, dass die Jacobi-Matrizen eine Kettenregel erfüllen, die die Form von Matrixmultiplikation annimmt:

$$J_{f\circ g}(x_0) = J_f(g(x_0)) \cdot J_g(x_0).$$

Wir berechnen also zuerst $J_f(x,y,z)$ und $J_g(x,y)$:

$$\begin{aligned} J_f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2zy & y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} J_g(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y & x \\ e^{x+y} & e^{x+y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere

$$\begin{aligned} J_f(g(2,1)) \cdot J_g(2,1) = J_f(2,e^3,0) \cdot J_g(2,1) \quad &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ e^3 & e^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

3) Sei

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

und

$$f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad f(t) = (0, \sin(t), \cos(t)).$$

a) Skizziere und beschreibe die Fläche $g^{-1}(1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Lösung: Wir haben

$$g^{-1}(1) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Die Fläche $g^{-1}(1)$ ist die 2-dimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^3$, i.e.

$$g^{-1}(1) = S^2.$$

□

b) Zeige, dass das Bild von f in $g^{-1}(1)$ enthalten ist.

Lösung: Wir müssen überprüfen, dass $g(f(t)) = 1$ gilt für alle $t \in [0,2\pi]$. Schnelles nachrechnen liefert tatsächlich

$$g(f(t)) = \sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1, \quad \forall t \in [0,2\pi].$$

□

c) Berechne den Gradienten $\nabla g(x,y,z)$ und $\nabla g(f(t))$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ und $t \in [0,2\pi]$.

Lösung: Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass der Gradient $\nabla g(x,y,z)$ von $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Spaltenvektor ist der über

$$\langle \nabla g(x,y,z), v \rangle = dg(x,y,z)[v], \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ v \in \mathbb{R}^3$$

definiert ist. Wir haben also

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Deshalb

$$\nabla g(f(t)) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

□

d) Skizziere $f'(t)$ und $\nabla g(f(t))$ auf der Fläche $g^{-1}(1)$ für $t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

Lösung: Der Weg $f(t)$ ist ein Grosskreis in der Ebene $\{x = 0\}$ auf der Sphäre S^2, der am Nordpol startet (i.e. $f(0) = (0, 0, 1)$) in "positiver y-Richtung" (e.g. $f(\pi/2) = (0, 1, 0)$) zum Südpol (i.e. $f(\pi) = (0, 0, -1)$) geht, und dann in "negativer y-Richtung" wieder zurück zum Nordpol $f(2\pi) = f(0)$ wandert.

Durch explizites Nachrechnen kann man überprüfen, dass

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f'(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f'(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geometrisch war dies zu erwarten: $f'(t)$ zeigt in die Richtung, in die der Weg sich bewegt, und wir haben in der Vorlesung gesehen, dass $f'(t)$ Senkrecht zu $\nabla(g(f(t))$ steht – letzteres zeigt in die Richtung der grössten Zuwachs von g bei $f(t)$, was in diesem Fall ein vielfaches von $f(t)$ ist.

$\square$

4) Betrachte die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeige, dass f in $(0, 0)$ nicht differenzierbar ist.

Hinweis: Argumentiere per Widerspruch und mit Satz 2.32 aus der Vorlesung.

Beweis: Wir nehmen per Widerspruch an, dass f bei $(0, 0)$ differenzierbar ist. Insbesondere kann $df(0, 0)$ als Jacobi-Matrix mit Einträgen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

aufgefasst werden. Da $f(x, 0) = 0$ und $f(0, y) = 0$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$, haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

insbesondere

$$df(0, 0) = (0, 0).$$

Differenzierbarkeit bei $(0,0)$ bedeutet aber auch, dass der Grenzwert

$$\lim_{(v,w)\to(0,0)} \frac{f(v,w) - f(0,0) - df(0,0)\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}}{\|(v,w)\|}$$

existiert. Aber $df(0,0)$ ist die Nullabbildung, also erhalten wir

$$\lim_{(v,w)\to(0,0)} \frac{f(v,w) - 0}{\sqrt{v^2 + w^2}} = \lim_{(v,w)\to(0,0)} \frac{vw}{v^2 + w^2}.$$

Aber durch einsetzen von $(v,0)$ und (v,w) ist leicht zu erkennen, dass dieser Grenwert nicht existiert – widerspruch zur differenzierbarkeit von f bei $(0,0)$.

$\square$