D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlösung Serie 6	FS 2021

1) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g\colon X \to \mathbb{R}^m$. Kreuze die richtigen Aussagen an:

- ☐ Falls f C^2 auf X ist, dann ist f auch C^1 auf X.
  Wahr.
- ☐ Falls f und g jeweils C^3 und C^2 auf X sind, dann ist $f \cdot g$ C^3 auf X.
  Falsch.
- ☐ Sei $f = (f_1, \ldots, f_m)$, wobei f_i Polynome sind und g ist C^k. Dann ist (falls definiert) f/g C^k auf X.
  Wahr.
- ☐ Sei f C^k mit $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt im Allgemeinen
  $$\partial_{xy} f = \partial_{yx} f.$$
  Wahr: Dies folgt aus Satz 2.43.

2) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^k Abbildung mit $k \geq 2$. Kreuze die richtigen Aussagen an:

- ☐ Der Gradient $\nabla f(x)$ ist eine $n \times n$ Matrix.
  Falsch: Ausser im trivialen fall von $n = 1$, ist der Gradient $\nabla f(x)$ ein n-dimensionalre Spaltenvektor und somit keine $n \times n$ Matrix im Allgemeinen.
- ☐ Die Hessesche Matrix $\mathrm{Hesse}_f(x)$ ist eine quadratische Matrix.
  Wahr.
- ☐ $\mathrm{Hesse}_f(x)$ ist symmetrisch.
  Wahr: Siehe Satz 2.43 und Vorlesung.
- ☐ $\mathrm{Hesse}_f(x)$ ist invertierbar.
  Falsch: Ein Gegenbeispiel kann in einer der unteren Aufgaben gefunden werden.

3) Bestimme die Hessesche Matrix der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ and der Stelle (x_0, y_0):

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2, \quad (x_0, y_0) = (1,1),$

Lösung: Wir berechnen alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung und bemerken a priori, dass $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$ gilt, weil das gegebene f hier C^∞, insbesondere C^2 ist (cf. Satz 2.43):

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x,y) &= \partial_x \left(2x + y\right) = 2,\\
\partial_{yy} f(x,y) &= 2,\\
\partial_{xy} f(x,y) &= \partial_x (x+y) = 1 = \partial_{yx} f(x,y).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir, dass die Hessesche Matrix konstant ist, insbesondere $\mathrm{Hesse}_f(x,y) = \mathrm{Hesse}_f(1,1)$ mit

$$\mathrm{Hesse}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

b) $f(x,y) = \cos(x) + \sin(y)x, \quad (x_0, y_0) = (\pi/2, \pi/2),$

Lösung: Ähnlich wie oben berechnen wir

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x,y) &= -\cos(x),\\
\partial_{yy} f(x,y) &= -\sin(y)x,\\
\partial_{xy} f(x,y) &= \cos(y) = \partial_{yx} f(x,y),
\end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{Hesse}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & \cos(y) \\ \cos(y) & -\sin(y)x \end{pmatrix}.$$

Insbesondere

$$\mathrm{Hesse}_f(\pi/2, \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\pi/2 \end{pmatrix}.$$

□

c) $f(x,y) = y^3 \cdot \left(\sin\left(e^{y^5 \cdot \sin(y^2)}\right) \cdot \cos(\sinh(y))\right), \quad (x_0, y_0) = (0,0).$

Lösung: Die Funktion f ist von der Form

$$f(x,y) = y^3 \cdot g(y),$$

insbesondere ist $f(x,y)$ unabhängig von x, was sofort

$$\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = \partial_{xx} f(x,y) = 0$$

impliziert. Da die Hessesche Matrix nur an der Stelle $(0,0)$ gefragt ist, muss nur noch $\partial_{yy} f(0,0)$ berechnet werden. Dafür beobachten wir:

$$\begin{aligned}\partial_{yy} f(x,y) &= \partial_y (3y^2 \cdot g(y) + y^3 \cdot g'(y)) \\ &= 6y \cdot g(y) + 3y^2 g'(y) + 3y^2 \cdot g'(y) + y^3 \cdot g''(y),\end{aligned}$$

und unabhängig davon, was $g(0), g'(0)$ und $g''(0)$ sind, erhalten wir

$$\partial_{yy} f(x,y) = 0.$$

Die Hessesche Matrix $\text{Hesse}_f(0,0)$ is also die 2×2 Nullmatrix.

□

4) Bestimme das Taylorpolynom der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bis zur zweiten Ordnung an der Stelle (x_0, y_0):

   a) $f(x,y) = x^3 + xy^4, \quad (x_0, y_0) = (1, 0),$
   b) $f(x,y) = \sin(y) \cdot e^{-x}, \quad (x_0, y_0) = (0, \pi).$

   Hinweis: Die folgende allgemeine Formel darf verwendet werden (siehe Seite 76 in den Handnotizen zur Vorlesung):

$$T_2 f((x,y);(x_0,y_0)) = f(x_0,y_0) + \left\langle \nabla f(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}(x,y) \cdot \text{Hesse}_f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   Lösung: In a) und b) müssen sämtliche partiellen Ableitungen der Ordnung 1 und 2 berechnet werden um ∇f und Hesse_f zu bestimmen.

   Wir beginnen mit a):

$$
\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= 3x^2 + y^4 \\
\partial_y f(x,y) &= 4xy^3 \\
\partial_{xx} f(x,y) &= 6x \\
\partial_{yy} f(x,y) &= 12xy^2 \\
\partial_{xy} f(x,y) &= 4y^3 = \partial_{yx} f(x,y).
\end{aligned}
$$

Mit dem Hinweis erhalten wir also

$$
\begin{aligned}
T_2 f((x,y);(1,0)) &= f(1,0) + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}(x,y) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= 1 + 3x + 3x^2 \\
&= 3x(x+1) + 1.
\end{aligned}
$$

Für b) berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= -\sin(y) e^{-x} \\
\partial_y f(x,y) &= \cos(y) e^{-x} \\
\partial_{xx} f(x,y) &= \sin(y) e^{-x} \\
\partial_{yy} f(x,y) &= -\sin(y) e^{-x} \\
\partial_{xy} f(x,y) &= -\cos(y) e^{-x} = \partial_{yx} f(x,y)
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
T_2 f((x,y);(0,\pi)) &= f(0,\pi) + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}(x,y) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= 0 - y + \frac{1}{2}(yx + xy) \\
&= x(1-y).
\end{aligned}
$$

$\square$