D-INFK	**Analysis II**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Musterlösung Serie 7	FS 2021

1) Untersuche die Matrizen auf ihre Definitheit:[1]

	pos.	**neg.**	**indef.**
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	☒	☐	☐
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	☐	☐	☒
$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	☐	☐	☒
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	☐	☐	☒
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	☐	☐	☒

2) Seien $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon K \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Kreuze die richtigen Aussagen an:

☐ f besitzt eine Extremalstelle.

Falsch: Ein Gegenbeispiel: $f\colon (-1.1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x$.

☐ g besitzt keine Extremalstelle.

Falsch: g besitzt sowohl eine Minimalstelle als auch eine Maximalstelle, weil K kompakt ist (Satz 2.17).

☐ g bestitzt mindestens zwei Extremalstellen

Wahr: Siehe oben.

☐ Die Stelle x_0 ist eine lokale Minimalstelle genau dann wenn für jedes $\delta > 0$ mit $C(x_0, \delta) \subseteq X$ gilt

$$f(y) \leq f(x_0),\ \forall y \in C(x_0, \delta).$$

Falsch: Das ist die Definition einer lokalen *Maximalstelle*, nicht Minimalstelle.

[1] Als Erinnerung: für invertierbare Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (nicht zwingend symmetrisch!) gilt: A ist positiv definit (resp. negativ definit), falls für alle $v \in \mathbb{R}^n$ folgendes gilt: $v^T A v > 0$ (resp. < 0). Falls A weder positiv noch negativ definit ist, nennt man A indefinit.

☐ Falls $df(x_0) = 0$ gilt, ist $f(x_0)$ entweder ein lokales Minumum oder Maximum.

Falsch: Für $f(x) = x^3$ ist 0 ein kritischer Punkt (i.e. $f'(0) = 0$), aber $f(0) = 0$ ist weder ein lokas Minimum noch Maximum.

☐ Die Menge der kritischen Punkte von f ist immer endlich.

Falsch: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1$ ist ein Gegenbeispiel.

3) Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

genau dann positiv definit ist, wenn $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$ gelten.

Beweis: Da die Matrix symmetrisch ist, können wir das Hauptminoren-Kriterium aus der linearen Algebra verwenden. Das heisst, A ist genau dann positiv definit, wenn die Matrizen $A_1 = (a)$ und $A_2 = A$ positive Determinante besitzten. Die Determinante einer 1-dimensionalen Matrix ist der Einrag selber, i.e. $\det A_1 = a$ und $\det A_2 = \det A = ad - b^2$. Wir haben also

$$A \text{ positive definit} \iff \det A_i > 0,\ i = 1, 2 \iff a > 0\ ad - b^2 > 0.$$

$\square$

4) Sei $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$. Zeige,

$$\nabla f(1, 1, 1) = 0 \in \mathbb{R}^3,$$

und bestimme die Eigenwerte von $\text{Hesse}_f(1, 1, 1)$.

Lösung: Wir berechnen

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4yz \\ 4y^3 - 4xz \\ 4z^3 - 4xy \end{pmatrix},$$

wöfur offensichtlich $\nabla f(1,1,1) = 0$ gilt. Die Hesse Matrix ist gegeben durch

$$\text{Hesse}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4z & -4y \\ -4z & 12y^2 & -4x \\ -4y & -4x & 12z^2 \end{pmatrix},$$

insbesondere

$$\text{Hesse}_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Mit "educated guesses" sieht man schnell, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren von $\text{Hesse}_f(1,1,1)$ mit Eigenwerten $16, -16$ und 4 sind.

□

5) Bestimme die Maxima und Minima der Funktion

$$f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy\left(1 - x^2 - y^2\right).$$

Lösung: Wir bestimmen die kritischen Punkte von f und untersuchen das Randverhalten. Beobachte:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y - 3x^2y - y^3 \\ x - x^3 - 3xy^2 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte im inneren des Definitionbereiches, i.e. $(x,y) \in (0,1)^2$ mit $\nabla f(x,y) = 0$. Das ist äquivalent zum folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{cases} y \cdot (1 - 3x^2 - y^2) & = 0, \\ x \cdot (1 - 3y^2 - x^2) & = 0. \end{cases}$$

Da $x, y \neq 0$, ist das obige Gleichungssystem äquivalent zu

$$\begin{cases} 1 - 3x^2 - y^2 &= 0, \\ 1 - 3y^2 - x^2 &= 0. \end{cases}$$

Wir erhalten mit der ersten Gleichung $y = \sqrt{1 - 3x^2}$ (die Negative Lösung kann ausgeschlossen werden, da per Annahme $y > 0$). Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$0 = 1 - 3(1 - 3x^2) - x^2 \iff 8x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{2}.$$

Wie bei y, kommt nur $x > 0$ in Frage, also $x = \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$y = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Somit ist der einzige kritische Punkt von f auf $(0,1)^2$ gegeben durch

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Ausserdem gilt

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{2}{4}) = \frac{1}{8}.$$

Betrache nun den Rand des Einheitswürfel $[0,1]^2$. Für die zwei Kanten K_1, K_2, die auf der x- und y-Achse liegen, erhalten wir $f|_{K_1} = f|_{K_2} = 0$. Da f im inneren auch negative Werte annimmt (z.B. bei $(2/3, 2/3)$) befinden sich keine Extremalstellen auf $K_1 \cup K_2$. Sei nun K_3 die Kante mit $y = 1$. Dann nimmt die Funktion f die Form $: [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto -x^3$ an. Diese hat keine kritischen Punkte in $(0,1)$. Diesselbe Logik Funktoniert für die übriggebliebene Kante K_4 (mit Funktion $y \mapsto -y^3$). Da wir $K_1 \cup K_2$ bereits ausgeschlossen haben, ist die einzige noch mögliche Extremalstelle $(1,1)$: Es gilt

$$f(1,1) = -1$$

und es ist einfach zu überprüfen, dass deshalb $(x_1, y_1) := (1,1)$ eine globale Minimalstelle von f ist.[2]

Wir schliessen also, dass

$$(x_0, y_0) \text{ und } (x_1, y_1)$$

[2] Das Produkt xy ist immer positiv, und $(1 - x^2 - y^2)$ ist am "negativsten" wenn x^2 und y^2 maximal sind, sprich bei $(1,1)$.

die Extremalstellen sind, wobei (x_0, y_0) eine Maximalstelle,[3] und (x_1, y_1) eine Minimalstelle sind.

□

[3] Per Ausschlussprinzip muss (x_0, y_0) ein globale Maximum sein, da $[0, 1]^2$ kompakt ist.