| | | |
|---|---|---|
| **D-INFK** | **Analysis II** | **ETH Zürich** |
| Prof. Marc Burger | Musterlösung Serie 8 | FS 2021 |

1) Gegeben ist eine glatte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und ein kritischer Punkt $(x_0, y_0)$. Bestimme, ob es sich dabei um ein lokales Maximum, lokales Minimum, oder Sattelpunkt handelt.

| **Fkt.** | **Krit. Pkt.** | **lok. Max.** | **lok. Min.** | **Sattelpkt.** |
|---|---|---|---|---|
| $f(x,y) = x^2 + y^2$ | $(0,0)$ | ☐ | ☒ | ☐ |
| $f(x,y) = -e^x \cdot y^2$ | $(2,0)$ | ☒ | ☐ | ☐ |
| $f(x,y) = xy$ | $(0,0)$ | ☐ | ☐ | ☒ |
| $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$ | $(0,\pi/2)$ | ☒ | ☐ | ☐ |

2) Zeige Aussage (3) von Satz 2.53 aus der Vorlesung.[1]

*Beweis:* Zu zeigen ist, dass für einen nicht-degenerieten kritischen Punkt $x_0$ von $f\colon U \to \mathbb{R}$ ($f$ ist $C^2$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) gilt, " $p \cdot q \neq 0$ impliziert, dass $x_0$ kein lokales Extremum von $f$ ist", wobei $p$ (resp. $q$) die Anzahl positiver (resp. negativer) Eigenwerte von $\mathrm{Hesse}_f(x_0)$ ist.

Da $p \cdot q \neq 0$, existieren zwei Eigenvektore $y_0$ und $y_1$ von

$$A := \mathrm{Hesse}_f(x_0)$$

mit Eigenwerten $\lambda_0 < 0$ und $\lambda_1 > 0$. Man beobachte, dass für alle $\varepsilon > 0$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned}(\varepsilon \cdot y_i)^T A\,(\varepsilon \cdot y_i) &= \langle \varepsilon \cdot y_i, A\,(\varepsilon \cdot y_i)\rangle \\ &= \varepsilon^2 \cdot \langle y_i, A\,y_i\rangle \\ &= \varepsilon^2 \langle y_i, \lambda_i \cdot y_i\rangle \\ &= \varepsilon^2 \lambda_i \|y_i\|^2 \\ &= \lambda_i \|\varepsilon \cdot y_i\|^2.\end{aligned}$$

Ähnlich zum Beweis von (1) von Satz 2.53, verwenden wir die Taylorentwicklung von $f$:

[1] Siehe Handnotizen vom 04.11 auf der Metaphorseite.

$$\begin{aligned} f(x_0+\varepsilon\cdot y_i) &= f(x_0)+\frac{1}{2}(\varepsilon\cdot y_i)^T Ay_i + E_2(x_0+\varepsilon\cdot y_i, x_0) \\ &= f(x_0)+\frac{\lambda_i}{2}\|\varepsilon\cdot y_i\|^2 + E_2(x_0+\varepsilon\cdot y_i, x_0) \\ &= f(x_0)+\left(\frac{\lambda_i}{2}+\frac{E_2(x_0+\varepsilon\cdot y_i, x_0)}{\|\varepsilon\cdot y_i\|^2}\right)\cdot\|\varepsilon\cdot y_i\|^2. \end{aligned}$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass in beiden Fällen der Ausdruck

$$\frac{E_2(x_0+\varepsilon\cdot y_i, x_0)}{\|\varepsilon\cdot y_i\|^2}$$

beliebig nahe bei 0 liegt, für $\varepsilon>0$ genügend klein. Insbesondere, gilt für $\varepsilon>0$ genügend klein, dass

$$\left(\frac{\lambda_0}{2}+\frac{E_2(x_0+\varepsilon\cdot y_0, x_0)}{\|\varepsilon\cdot y_0\|^2}\right)<0,\ \left(\frac{\lambda_i}{2}+\frac{E_2(x_0+\varepsilon\cdot y_i, x_0)}{\|\varepsilon\cdot y_i\|^2}\right)>0,$$

da $\lambda_0<0$ und $\lambda_1>0$. Insbesondere, gilt

$$f(x_0+\delta\cdot y_0)<f(x_0),\ f(x_0+\delta\cdot y_1)>f(x_0),\quad \forall\delta\in(0,\varepsilon].$$

Dies bedeutet, dass wir für jeden offenen Ball $B$ um $x_0$ zwei Punkte $z_0=x_0+\delta y_0$ und $z_1=x_0+\delta y_1$ finden (für $\delta$ genügend klein), so dass

$$z_0,z_1\in B \text{ und } f(z_0)<f(x_0),\ f(z_1)>f(x_0).$$

Das heisst, dass $x_0$ weder ein lokales Maximum noch Minimum von $f$ ist.

□

3) Seien $a>b>c>0$. Bestimme die Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

mit Nebenbedingungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1.$$

Interpretiere das Resultat geometrisch.

*Lösung:* Wir verwenden die Methode der Lagrange multiplier aus der Vorlesung. Dazu definieren wir

$$g(x,y,z) := \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1$$

und verwenden Satz 2.56 aus Vorlesung. Laut diesen, erfüllen kritische Punkte $v$ von $f$ auf

$$Y := g^{-1}(0)$$

entweder $\nabla g(v) = 0$ oder $\nabla f(v) - \lambda \nabla g(v) = 0$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir berechnen

$$\nabla g(x,y,z) = 2 \cdot \begin{pmatrix} x/a \\ y/b \\ z/c \end{pmatrix}.$$

Der Ursprung $(0,0,0)$ ist die einzige Nullstelle von $\nabla g$, diese liegt aber nicht auf $Y$. Andererseits haben wir

$$\nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla g(x,y,z) = 2 \cdot \begin{pmatrix} x(1-\lambda/a) \\ y(1-\lambda/b) \\ z(1-\lambda/c) \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0.$$

Wie vorhin, kommt $(0,0,0)$ als Nullstelle nicht in Frage. Wir machen also eine Fallunterscheidung und nehmen zuerst an, dass $x \neq 0$. Dann muss aber, $\lambda = a$ gelten. Da $a > b > c > 0$, gilt die obige Gleichung nur wenn $y = 0$, $z = 0$. Um $x$ zu bestimmen, verwenden wir $(x,y,z) = (x,0,0) \overset{!}{\in} Y$, das heisst

$$g(x,0,0) = x^2/a^2 - 1 \overset{!}{=} 0.$$

Die Vektoren

$$u^{\pm} := (\pm a, 0, 0)$$

erfüllen also die obige Gleichung. Ganz Analog erhalten wir vier weitere Kandidaten für die kritische Punkte für die Fälle $y \neq 0$ und $z \neq 0$, nämlich

$$v^{\pm} = (0, \pm b, 0), \; w^{\pm} = (0,0,\pm c).$$

Da $Y$ Kompakt ist[2], muss unter diesen 6 Punkten mindestens ein globales Maximum und ein globales Minimum vorhanden sein. Wir haben $a > b > c$, woraus sich schnell schliessen lässt, dass $u^{\pm}$ zwei globale Maxima und $w^{\pm}$ zwei globale Minima von $f$ auf $Y$ sind.

Nun behaupten wir, dass $v^{\pm}$ *keine* Extrema von $f$ auf $Y$ definieren. Aufgrund der Symmetrie, reicht es den Fall $v = v^+$ zu betrachten. Die

[2] Kurze Übung: wieso?

Idee/Intuition ist die Folgende: wir können lokal in $x$-Richtung laufen und $f$ grösser machen, ohne dabei $Y$ zu verlassen, da $a > b$ gilt. Ähnlich lässt sich geometrisch schliessen, dass $f$ kleiner wird in $z$ Richtung auf $Y$, da $b > c$. Rigoros sieht die Rechnung wie folgt aus:

Sei $0 < \varepsilon < 1$ und $\delta > 0$, so dass $f(0, b-\varepsilon, \delta) \in Y$. Das $\delta$ lässt sich in Abhängigkeit von $\varepsilon$ bestimmen:

$$g(0, b-\varepsilon, \delta) = \frac{(b-\varepsilon)^2}{b^2} + \frac{\delta^2}{c^2} - \overset{!}{=} 0.$$

Daraus lässt sich

$$\delta^2 = c^2 \left(1 - \frac{(b-\varepsilon)^2}{b^2}\right) = c^2 - \frac{c^2}{b^2}(b-\varepsilon)^2$$

schliessen. Es gilt also

$$\begin{aligned} f(0,b,0) - f(0, b-\varepsilon, \delta) &= b^2 + (b-\varepsilon)^2 + \delta^2 \\ &= b^2 + \underbrace{(1 - c^2/b^2)}_{\in(0,1)}(b-\varepsilon)^2 + c^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Da $(0, b-\varepsilon, \delta)$ beliebig nahe bei $(0, b, 0)$ liegt, für $\varepsilon > 0$ genügend klein, zeigt die obige Ungleichung, dass $v = (0, b, 0)$ kein lokales Minimum ist.

Ganz Analog kann man mit $(\delta', b-\varepsilon, 0)$ nahe bei $v$ argumentieren, dass $v$ keine lokales Maximum ist.[3] Somit ist $v$ (und deshalb auch $v^-$!) kein lokales Extremum.

**Geometrische Interpretation:**

Die Menge $Y$ stellt ein Ellipsoid in $\mathbb{R}^3$ dar (siehe Wikipedia). Die Funktion $f$ misst den Abstand von jeden Punkt $(x, y, z)$ zum Ursprung. Das Problem lässt sich geometrisch wie folgt formulieren: "Finde die Punkte auf dem Ellipsoid $Y$, die den Abstand (lokal/global) zum Ursprung maximimieren/minimieren.Äufgrund der Wahl $a > b > c$ ist es geometrisch Einleuchtend, dass die Punkte $(\pm a, 0, 0)$ und $(0, 0, \pm c)$ den Abstand maximieren resp. minimieren. Da $b$ aber zwischen $a$ und $c$ liegt, ist es auch geometrisch klar, dass leichte Perturbationen in $x$ und $z$ Richtung den Abstand vergrösseren/verringeren.

$\square$

[3] Übung!

4) Seien $p > 1$, $a$, $b > 0$. Finde die Maxima von

$$f(x, y) = ax + by$$

in

$$Y = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x > 0,\ y > 0,\ g(x, y) = x^p + y^p - 1 = 0\right\}.$$

Schliesse daraus die **Höldersche Ungleichung**:

Für alle $a$, $b, \xi$, $\eta$ positiv und $p > 1$ gilt:

$$a\xi + b\eta \leq (\xi^p + \eta^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (a^q + b^q)^{\frac{1}{q}},$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

*Beweis.* Der Gradient von $f$ ist gegeben durch $\nabla f(x, y) = (a, b)$, der per Wahl von $a$ und $b$ nie 0 ist. Wir berechnen die Nullstellen der Lagrange Gleichung:

$$\nabla f(x, y) - \lambda \cdot \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} a - \lambda p x^{p-1} \\ b - \lambda p y^{p-1} \end{pmatrix}$$

ist Null, genau dann wenn

$$a = \lambda p x_0^{p-1} \text{ und } b = \lambda y_0^{p-1}.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{x_0^{p-1}}{y_0^{p-1}} &\implies \left(\frac{a}{b}\right)^{p/(p-1)} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^p \\ &\implies \left(\frac{a}{b}\right)^q = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^p. \end{aligned}$$

Wir haben noch die Randbedingung $x^p + y^p = 1$, womit wir folgendes erhalten:

$$x_0^p = (a/b)^q \cdot y_0^p = (a/b)^q - (a/b)^q \cdot x_0^p \implies x_0^p = \frac{a^q}{a^q + b^q}$$

und durch Analogie/Symmetrie

$$y_0^p = \frac{b^q}{a^q + b^q}.$$

□

Der Punkt $(x_0, y_0)$ ist eine lokas Maximum auf $Y$[4] und deshalb erhalten wir, für $\xi, \eta \in Y$:

$$\begin{aligned} a\xi + b\eta \leq f(x_0, y_0) &= \frac{1}{(a^q + b^q)^{1/p}} \left( a^{\frac{q}{p}+1} + b^{\frac{q}{p}+1} \right) \\ &= \frac{a^q + b^q}{(a^q + b^q)^{1/p}} \\ &= (a^q + b^q)^{1-1/p} \\ &= (a^q + b^q)^{1/q} \\ &= (a^q + b^q)^{1/q} \cdot (\xi^p + \eta^p)^{1/p}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\xi, \eta \in Y$ verwendet haben.

Für positive vielfache von $\eta, \xi \in Y$ gilt die obige Ungleichung immernoch, was also auch den Fall $\eta, \xi > 0$ abdeckt. Dies beendet den Beweis.

[4] Übung: wieso?