1) Sei $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, und $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Kreuze die richtigen Aussagen an.

- ☐ Das Wegintegral $\int_\gamma f(s)\,ds$ ist eine reelle Zahl.
  Wahr.
- ☐ Falls $\gamma(t) \equiv v$ für alle $t \in [a,b]$, dann gilt $\int_\gamma f(s)\,ds = 0$.
  Wahr.
- ☐ Für $\sigma(t) := \gamma(-t)$ gilt $\int_\sigma f(s)\,ds = -\int_\gamma f(s)\,ds$.
  Wahr.
- ☐ Falls $f = \nabla g$, dann gilt $\int_\gamma f(s)\,ds = 0$.
  Falsch: Die Aussage gilt zwar wenn γ ein geschlossener Weg ist, ist im Allgemeinen aber falsch.
- ☐ Sei $a = 0$, $b = 1$ und
  $$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, 1/2), \\ \gamma(1), & t \in [1/2, 1] \end{cases},$$
  dann gilt $\int_\gamma f(s)\,ds = \int_\sigma f(s)\,ds$.
  Wahr: Entweder durch explizites Nachrechnen, oder Satz 3.8 aus der Vorlesung.

2) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Bestimme das Wegintegral
$$\int_\gamma f(s)\,ds,$$
für folgende f und γ:

a)
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix},\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 3t+1 \\ t \end{pmatrix},$$

Lösung: Wir berechnen

$$f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4t,$$

und per Definition gilt dann

$$\int_\gamma f(s)\, ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = 4 \cdot \int_0^1 t\, dt = 2.$$

$\square$

b)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ -2 \end{pmatrix}, \ \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wie davor berechnen wir

$$f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = t^3 - 4t,$$

und somit

$$\int_\gamma f(s)\, ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 t^3\, dt - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}.$$

$\square$

c)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \ \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir berechnen

$$f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = 0$$

und somit ist das Wegintegral trivial:

$$\int_\gamma f(s)\, ds = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 0\, dt = 0.$$

$\square$

3) Berechne die Arbeit der folgenden Vektorfelder f entlang der Kurven C. Bestimme zudem jeweils den (maximalen) Definitionsbereich des Vektorfeldes f.

a)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y+2 \end{pmatrix}$$

und $C \subseteq \mathbb{R}^2$ der Viertelkreisbogen, zentriert im Ursprung, von $(4,-4)$ nach $(4,4)$.

Lösung: Der Definitionsbereich von f ist ganz $\mathbb{R}^2$. Um eine geeignete Parametrisierung von C zu finden, berechnen wir erstmal die Norm von $(4,4)$:

$$\|(4,4)\| = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}.$$

Das heisst, dass $(4,4)$ und $(4,-4)$ auf den Kreis mit Radius $r := 4\sqrt{2}$ und Zentrum $(0,0)$ liegen. Betrachte also den folgenden Weg:

$$\gamma(t) := r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Wir haben jeweils

$$\gamma(\pi/4) = (r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2}) = (4,4) \text{ und ähnlich } \gamma(3\pi/4) = (4,-4).$$

Man ist also verleitet $\gamma\colon [\pi/4, 3\pi/4] \to \mathbb{R}^2$ als Parametrisierung von C zu wählen, *aber* das Bild von γ beschreibt den Dreiviertelkreisbogen von $(4,4)$ zu $(4,-4)$. Die richtige Wahl ist

$$\gamma\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\pi/4 - t) \\ \sin(\pi/4 - t). \end{pmatrix}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= \begin{pmatrix} r^3 \cos(\pi/4 - t)\sin(\pi/4 - t)^2 \\ r^3 \cos(\pi/4 - t)^2 \sin(\pi/4 - t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin(\pi/4 - t) \\ r\cos(\pi/4 - t) \end{pmatrix} \\ &= r^4 \cdot \left(\cos(\pi/4 - t)^3 \cdot \sin(\pi/4 - t) - \cos(\pi/4 - t) \cdot \sin(\pi/4 - t)^3\right) \end{aligned}$$

Dass unbestimmte Integral von

$$\cos(a-x)^3 \sin(a-x) - \sin(a-x)^3 \cos(a-x)$$

ist gegeben durch

$$\frac{1}{16}\cos(4(a-x))^1,$$

und somit erhalten wir mit $a = \pi/4$:

$$\int_\gamma f(s)\,ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \frac{r^4}{16}\cdot(\cos(\pi-2\pi)-\cos(\pi-0)) = 0.$$

$\square$

b)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x\ln(y) \\ \frac{x^2}{2y} \end{pmatrix}$$

und $C \subseteq \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit Ecken $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$, positive orientiert.[2]

Lösung: Der maximale Lösungsbereich von f ist

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > 0\right\}.$$

Wir wählen γ als die Konkatenation von

$$\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_1(t) = (t+1,1), \gamma_2 \colon [0,2] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_2(t) = (2,t+1),$$

und

$$\gamma_3 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_3(t) = (2-t, 3-2t).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(s)\,ds &= \int_0^1 ((t+1)\ln(1), (t+1)^2/2)\cdot(1,0)\,dt + \\ &+ \int_0^2 (2\ln(t+1), 2/(t+1))\cdot(0,1)\,dt + \\ &+ \int_0^1 ((2-t)\ln(3-2t), (2-t)^2/2(3-2t))\cdot(-1,-2)\,dt \\ &= 0 + \int_0^2 \frac{2}{t+1}\,dt + \int_0^1 (t-2)\ln(3-2t) - \frac{(2-t)^2}{3-2t}\,dt \\ &= 2\cdot\int_0^2 \frac{1}{t+1}\,dt + \int_0^1 (t-2)\ln(3-2t)\,dt + \int_0^1 \frac{(2-t)^2}{2t-3}\,dt.\end{aligned}$$

Mit üblichen Integrationsmethoden kann man schliessen, dass

---

[1] Übung!

[2] Sprich im Gegenuhrzeigersinn.

$$2 \cdot \int_0^2 \frac{1}{t+1}\,dt + \int_0^1 (t-2)\ln(3-2t)\,dt + \int_0^1 \frac{(2-t)^2}{2t-3}\,dt =$$
$$= 2\ln(3) + \left(1 - \frac{15\ln(3)}{8}\right) + \left(-1 - \frac{\ln(3)}{8}\right),$$

was gleich 0 ist.

$\square$

c)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

und $C \subseteq \mathbb{R}^2$ der Kreis um den Ursprung mit Radius $r > 0$.

Lösung: Wir beschreiben C mit der Parametrisierung

$$\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = r \cdot (\cos(t), \sin(t)),[3]$$

und beobachten:

$$f(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} r\cos(t)/r^2 \\ r\sin(t)/r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)/r \\ \sin(t)/r \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\int_\gamma f(s)\,ds = r^{-1} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = 0.$$

$\square$

4) Finde für die unteren Vektorfelder f einen geschlossenen Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$,[4] so dass $\int_\gamma f(s)\,ds \neq 0$.

a)

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-z \end{pmatrix},$$

[3]Streng genommen, stimmt der Definitionsbereich nicht mit dem aus der Aufgabenstellung überein. Bis auf vorverketten mit der Funktion $h(t) = 2\pi t$ macht dies aber keinen Unterschied.

[4]Hier bedeutet dies $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Lösung: Wir behaupten, dass

$$\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

die gewünschten Eigenschaften erfüllt. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(s)\,ds &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1\,dt \\
&= 2\pi \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

□

b)

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Proof. Wir wählen γ wie oben und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(s)\,ds &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t)+\sin(t) \\ \sin(t) \\ \cos(t)-\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin(t)^2\,dt < 0.
\end{aligned}$$

□