

Appendix

In diesem Appendix wollen wir den Satz 1.12 beweisen. Wir benötigen dazu Begriffe aus der linearen Algebra und reduzieren das Rechnen auf ein Minimum.

Es geht also um die D-Gl.

$$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \dots + a_0 y = 0 \quad (*)$$

wobei $\{a_0, \dots, a_{k-1}\} \subset \mathbb{C}$. Wir wollen zeigen, dass falls α eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$P(x) = x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0$$

ist, so sind

$$e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{l-1} e^{\alpha x}$$

l linear unabhängige Lösungen von (H).

Die Aussage über die lineare Unabhängigkeit folgt aus der Tatsache dass die Potenzen

$$1, x, \dots, x^{l-1}$$

über $\mathbb{C}$ linear unabhängig sind.

Es geht also darum zu zeigen, dass obige Funktionen Lösungen von (H) sind.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra

zerfällt $P(x)$ in lineare Faktoren:

$$P(x) = \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i) \quad (*)$$

mit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \mathbb{C}$.

Wir betrachten jetzt folgende lineare Abbildungen:

$$d : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$$f \mapsto f'$$

$$D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$$f \mapsto f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + a_0 f.$$

Behauptung: $D = \prod_{i=1}^k (d - \alpha_i \text{Id})$

wobei $\text{Id} : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

die Identitätsabbildung bezeichnet.

In der Tat, aus (*) erhalten wir

$$a_{k-j} = (-1)^j \sum_{i_1 < \dots < i_j} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_j}$$

mit $1 \leq j \leq k.$

Wir können das Produkt von
linearen Abbildungen

$$(d - \alpha_1 \text{Id})(d - \alpha_2 \text{Id}) \cdots (d - \alpha_k \text{Id})$$

ausmultiplizieren und nach Potenzen

$$d^{k-j} = \underbrace{d \cdots d}_{k-j} \quad \text{ordnen:}$$

$$= d^k - \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) d^{k-1} + \cdots$$

$$+ (-1)^j \left(\sum_{i_1 < \cdots < i_j} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_j} \right) d^{k-j} \\ \cdots$$

$$= d^k + a_{k-1} d^{k-1} + \cdots + a_0 d = \mathbb{D}.$$

□

Nun ändern wir die Notation ein wenig und bezeichnen mit

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r$$

die verschiedenen Nullstellen von P und mit

$$m_1, \dots, m_r$$

die entsprechenden Vielfachheiten.

Damit gilt:

$$P(x) = \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{m_i}$$

$$D = \prod_{i=1}^r (d - \alpha_i)^{m_i}$$

Sei nun $\forall x \in \mathbb{C}$:

$$M_\alpha : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$
$$f \mapsto e^{\alpha \cdot} f(\cdot)$$

1.h. $(M_{-\alpha} f)(x) = e^{\alpha x} f(x)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (M_{-\alpha} M_{\alpha} f)(x) &= e^{-\alpha x} e^{\alpha x} f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

und somit ist

$$M_{-\alpha} = (M_{\alpha})^{-1}$$

das Inverse von M_{α} . Die nächste

Aussage ist: $\forall r \geq 1, \forall x \in \mathbb{C}$:

$$(d - \alpha Id)^r = M_{\alpha} d^r M_{-\alpha}.$$

Für $r=1$ ist es eine direkte Rechnung:

$$(M_{\alpha} d M_{-\alpha} f)(x)$$

$$= e^{\alpha x} (e^{-\alpha x} f(x))'$$

$$= e^{\alpha x} \{-\alpha e^{-\alpha x} f(x) + e^{-\alpha x} f'(x)\}$$

~ 42 ~

$$= f'(x) - \alpha f(x) = (d - \alpha I - 1)f(x).$$

Für $r \geq 1$ allgemein:

$$(d - \alpha I - 1)^r = (M_\alpha d M_{-\alpha})^r$$

$$= \underbrace{M_\alpha d M_{-\alpha}}_{Id} \underbrace{M_\alpha d M_{-\alpha}}_{Id} \dots \underbrace{M_\alpha d M_{-\alpha}}_{Id}$$

$$= M_\alpha d^r M_{-\alpha}.$$

Folglich:

$$D = \prod_{i=1}^r \underbrace{M_{\alpha_i}^{m_i} d M_{-\alpha_i}^{m_i}}_{\text{...}}$$

d alle linearen Abbildung $M_{\alpha_i} d M_{-\alpha_i}$.

vertauschbar sind folgt:

$$\text{Ker}(M_{\alpha_i}^{m_i} d M_{-\alpha_i}^{m_i}) \subset \text{Ker } D.$$

-43-

Es bleibt nur noch

$$\text{Ker}(M_\alpha d^l M_{-\alpha})$$

zu bestimmen:

da M_α invertierbar ist, folgt

$$\text{Ker}(M_\alpha d^l M_{-\alpha}) = \text{Ker}(d^l M_{-\alpha})$$

und letzteres

$$= \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : d^l(M_{-\alpha} f) = 0 \}.$$

Nun ist $\text{Ker}(d^l)$ genau der Vektorraum der Polynome mit $\text{grad} \leq l-1$, also von $1, x, \dots, x^{l-1}$ aufgespannt.

Somit folgt:

$$\text{Ker}(d^l M_{-\alpha}) = \{ e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{l-1} e^{\alpha x} \}.$$
