

Analysis II.

Kapitel 1. Gewöhnliche
Differentialgleichungen.

Kapitel 2. Differentialrechnung
im $\mathbb{R}^n$

Kapitel 3. Integration im $\mathbb{R}^n$.

Im Kapitel 1 geht es noch um Funktionen einer Variablen in $\mathbb{R}$.

Das Thema handelt von Gleichungen in denen eine zu bestimmende Funktion $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ sowie deren Ableitungen $y'(x)$, $\dots$, $y^{(n)}(x)$ vorkommen.

Im Kapitel 2 geht es um den Begriff der Ableitung einer Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in einem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$. Der eindimensionalen Begriff lässt sich nicht unmittelbar verallgemeinern. Viel mehr wird die Ableitung $Df(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch eine lineare Abbildung gegeben sein.

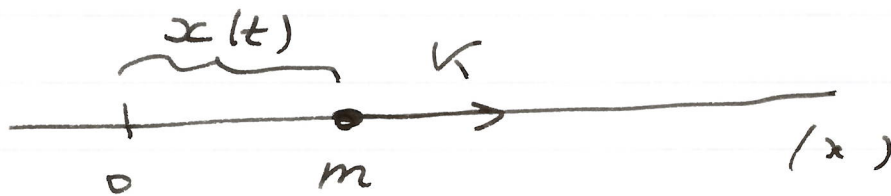
Im Kapitel 3 geht es um verschiedene Begriffe des Integrals: Lebesgue Integral $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, Riemann Integral $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Kapitel 1. Gewöhnliche Diff.-Gleichungen.

Einleitung 1.1. Wir beginnen mit Beispielen.

Beispiele 1.1 :

(1) (Ko. Ex. 2.1.1. (2))



K = konstante Kraft

m = Masse des Massenpunktes

$x(t)$ = Position zur Zeit t .

$\Rightarrow x'(t)$ Geschwindigkeit

Newton:

$$m x''(t) = K$$

Viele Lösungen!

Analysis I $\Rightarrow$

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{m} t^2 + c_1 t + c_2$$

c_1, c_2 beliebig.

Wen : $x(0) = c_2$ Position in $t=0$

$x'(0) = c_1$ Geschw. in $t=0$

Festlegung von $x(0)$ und $x'(0)$

= Randbedingungen

$\Rightarrow$ Eindeutige Lösung.

(K6: EX 2.1.1.(3))

(2) Aus Analysis I: Sei $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

DGL: $f' = a$

Dann ist $f(x) = \int_0^x a(t) dt$
eine Lösung [AnI. § 5.4.]

Alle Lösungen sind der Form

$$f(x) = C + \int_0^x a(t) dt, \quad C \text{ konst.}$$

$\Rightarrow$ Lösung von $f' = a$ ist durch

die Randbedingung $f(0) = C$

Eindeutig bestimmt.

Gewöhnliche D-Gleichung ist eine Gleichung:

$$F(x, \overset{v}{y}, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (*)$$

Die Funktion $x \mapsto y(x)$ ist Lösung
falls

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x.$$

Ordnung = die Ordnung der höchsten
in (*) vorkommenden Ableitung.

Beispiel (1): Ordnung 2.

Beispiel (2): Ordnung 1.

- 7 -

(Ko: Ex. 2.14)

Beispiel 1.2. (Reduktion der Ordnung)

$$y'' = a(x)y' + b(x)y \quad (*)$$

Definiere: $f_0(x) = y(x)$

$$f_1(x) = y'(x)$$

Mit $F(x) = \begin{pmatrix} f_0(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix}$ ist $(*)$

Äquivalent zu:

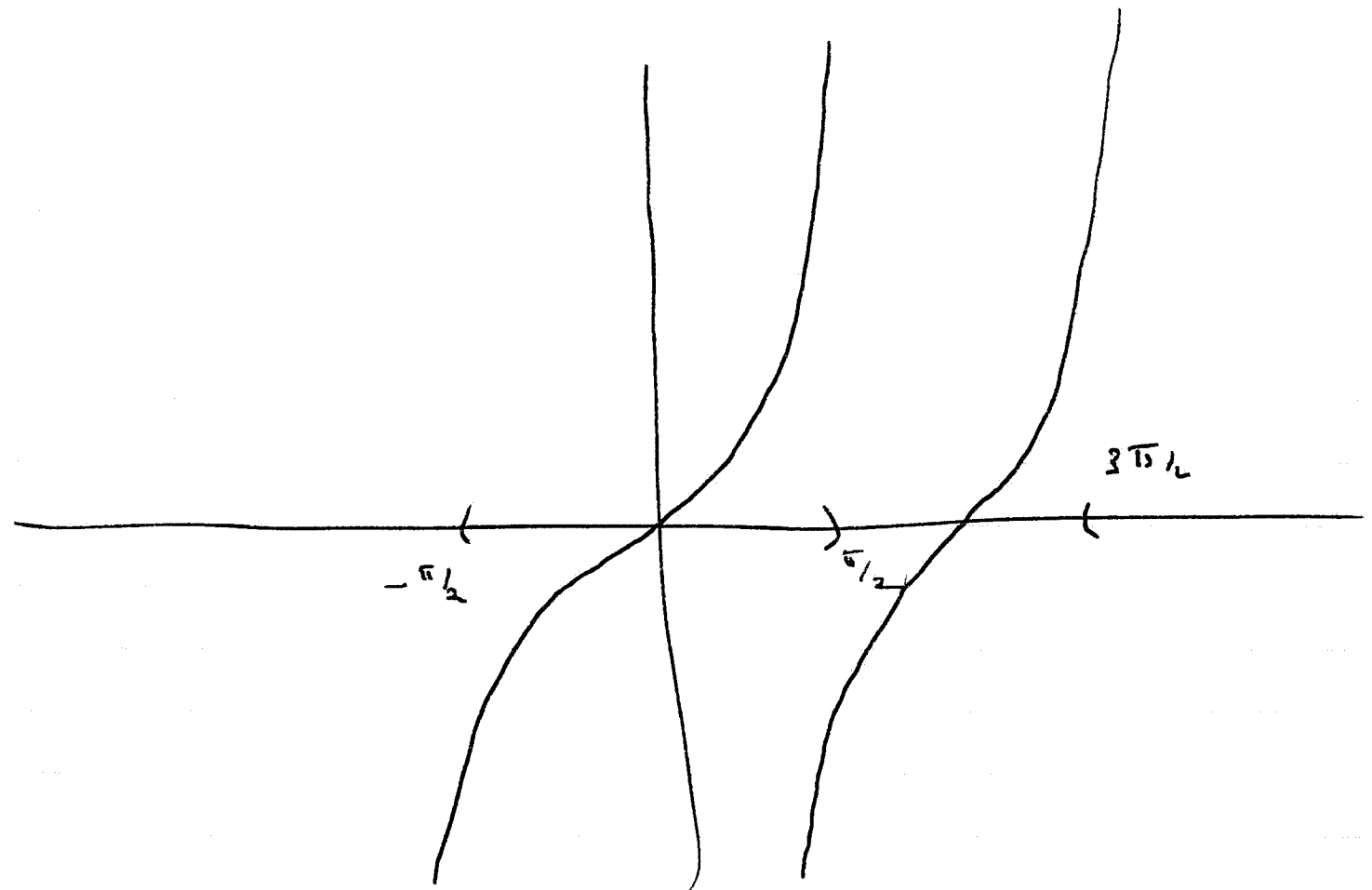
$$F'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix} F(x)$$

Eigenschaft der Beispiele (1), (2):

Lösungen existieren $\forall t$ bez. $\forall x$.

Beispiel 1.3 $y' = 1 + y^2$ (siehe An.I)
Zig Zag Perm.)

Eine Lösung: $y(x) = \tan(x)$



$(-\pi/2, \pi/2)$: maximale Intervall $\ni 0$
in dem die Lösung $\tan(x)$
existiert.

$y(x) := \tan(x - x_0)$: auch Lösung.

$(x_0 - \pi/2, x_0 + \pi/2) \ni x_0$, Maximaler

Existenzintervall $\ni x_0$.

(Ko. Thm 2.1.6)

Theorem 1.4. Sei $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, differenzierbar
(Siehe Kap. 2) und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

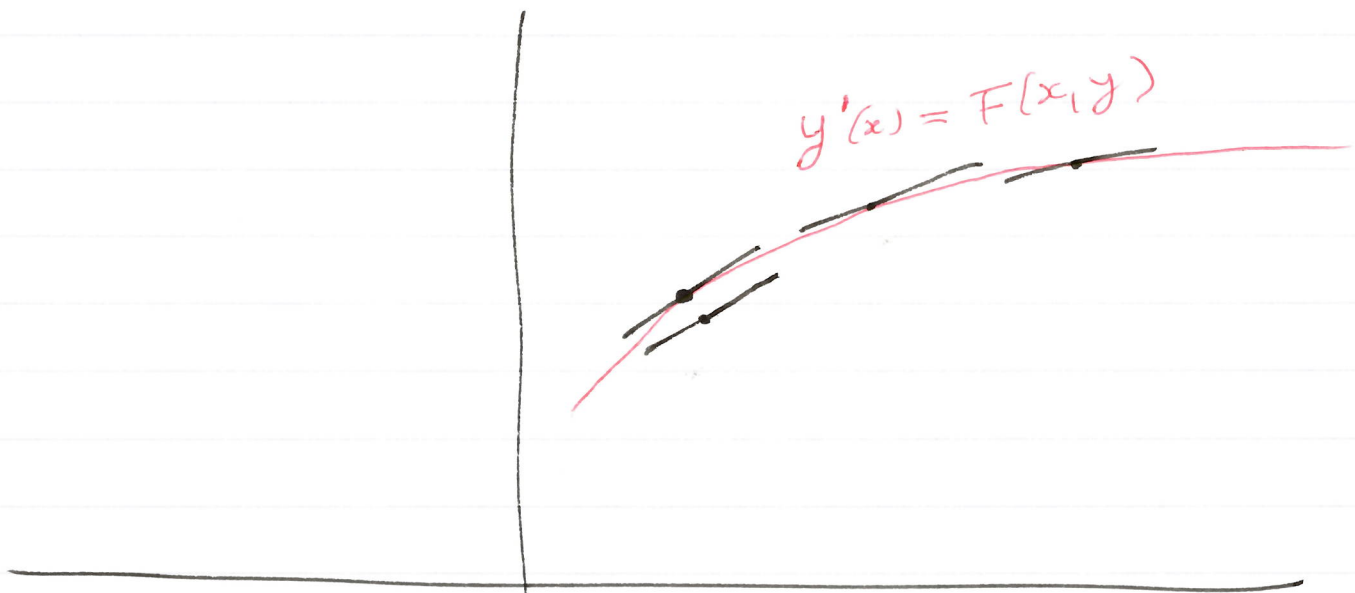
Dann gibt es maximales offenes Intervall
 $I \ni x_0$ und eine eindeutige Lösung

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

der DGL: $y' = F(x, y)$

mit $f(x_0) = y_0$.

Interpretation: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert
ein Richtungsfeld auf $\mathbb{R}^2$:

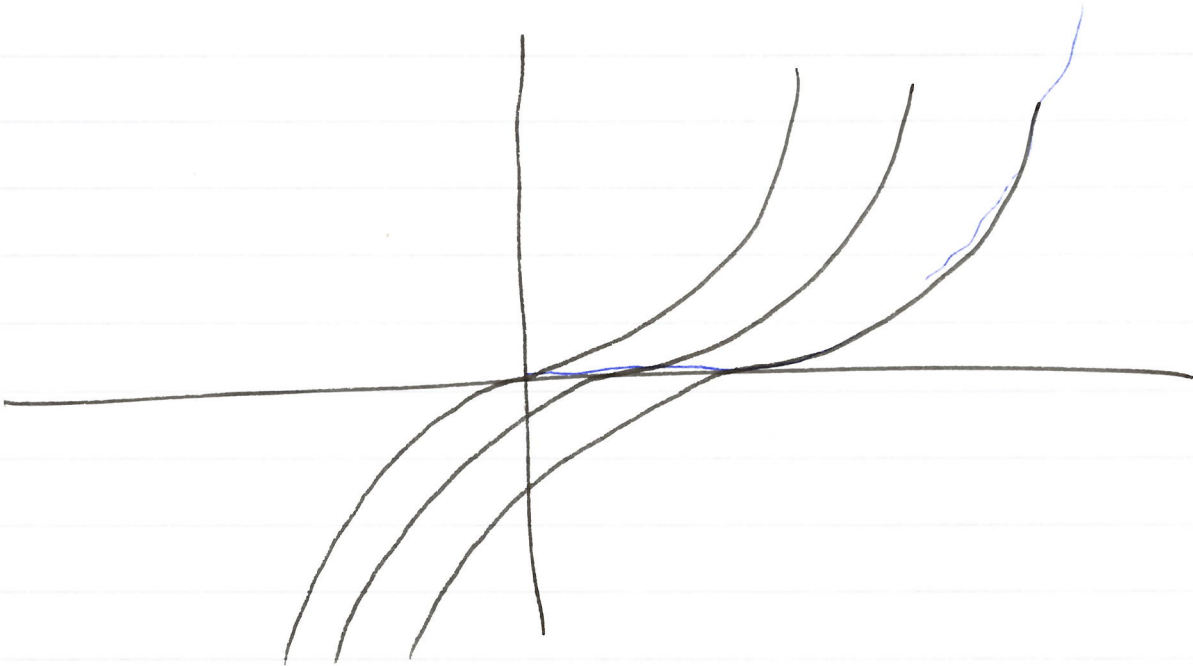


$F(x, y) =$ Steigung der Geraden
durch (x, y) .

Die DGL $y' = F(x, y)$ besteht darin,
dass in jedem Punkt (x, y) die Steigung
der durch diesen Punkt gehende
Lösungskurve festgelegt wird.

Beispiel 1.5. (Gegenbeispiel...)

$$y' = \sqrt[3]{y^2}.$$



$$y(x) = \left(\frac{x-c}{3}\right)^3 : \text{Lösung } \forall c.$$

$$y(x) = 0 : \text{Lösung}.$$

Durch jeden Punkt der x -Achse
gibt es unendlich viele Lösungen!

1.2. Lineare Differentialgleichungen.

(Ko: 2.2.)

(Ko: Def. 2.2.1)

Def. 1.6 : $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $k \geq 1$.

Eine homogene lineare diff. Gleichung der Ordnung k ist eine Gleichung

$$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (1)$$

wobei $a_i : I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig sind.

Inhomogene lineare diff. Gleichung:

$$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \dots + a_0 y = b \quad (2)$$

wobei $b : I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $b \neq 0$.

(1) ist die zu (2) zugehörige homogene Gleichung.

$\mathbb{R}$

$\cup$

Bemerkung: $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ zerlegen:

$$f(t) = f_1(t) + i \cdot f_2(t)$$

mit $f_1, f_2: I \rightarrow \mathbb{R}$.

f k -mal Diff. $\Leftrightarrow f_1, f_2$ k -mal Diff.

Sei $C^k(I, \mathbb{C}) = \left\{ f: I \rightarrow \mathbb{C} \text{ } k\text{-mal} \right.$
 $\left. \text{stetig differenzierbar} \right\}$

Ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

$$D: C^k(I, \mathbb{C}) \rightarrow C(I, \mathbb{C})$$

$$\text{Def. } f \mapsto f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + \dots + a_1 f'$$

ist eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung.

$S := \text{Ker } D$ ist dann

die Menge der Lösungen der homogenen D -GL. und damit ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum

(Ko: Thm 2.2.3)

Theorem 1.4. Sei $x_0 \in I$.

(1) Die Abbildung

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \mathbb{C}^k \\ f &\longmapsto \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ \vdots \\ f^{(k-1)}(x_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum Isomorphismus.

(2) Die inhomogene Gleichung

$$D(f) = b \quad (In)$$

besitzt eine Lösung $f_0 \in C^k(I, \mathbb{C})$

und die Menge S_b der Lösungen

$$\text{ist: } S_b = f_0 + S.$$

Bemerkung 1.7 : Falls die Funktionen

$a_0, \dots, a_{k-1} \in C(I, \mathbb{R})$ dann

gilt Thm 1.6 mit C^k ersetzt durch $\mathbb{R}^k$.

1.3. Lineare Differentialgleichungen der Ordnung 1. (Ko 2.3)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall,
 $a, b \in C(I, \mathbb{C})$.

$$y' + ay = b.$$

Schritt 1: Finde alle Lösungen von
 $y' + ay = 0$ (Hom.)

Schritt 2: Finde eine Lösung von
 $y' + ay = b$ (In.)

Schritt 1: $y' + ay = 0$

$$\frac{y'}{y} = -a$$

Nun ist $\frac{y'}{y} = (\ln y)'$ (!?)

Also: $(\ln y)' = -a$

Sei A eine Stammfunktion von a
[Analysis I]

$$\Rightarrow (\ln y)' = -A'$$

Folglich $(A + \ln y)' = 0$

$$A + \ln y = c \quad \text{Konstante.}$$

$$\Rightarrow y = e^c \cdot e^{-A}$$

$$= \exp(c) \underline{\underline{\exp(-A)}}$$

- 18 -

Führt uns zum Ansatz:

$$f(x) = z \exp(-A(x))$$

Kettenregel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= z \exp(-A(x)) (-A'(x)) \\ &= -a(x) f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) + a(x) f(x) = 0.$$

(Ko. Prop. 2.3.1)

Satz 1.8. Die Lösungen der DGL

$$y' + a y = 0$$

sind der Form $f(x) = z \exp(-A(x))$

wobei $z \in \mathbb{C}$, A Stammfunktion von a .

Die Lösung f für welche $f(x_0) = y_0$

gilt ist $f(x) = y_0 \exp(A(x) - A(x_0)).$

Beweis: Sei f Lösung von $y' + ay = 0$

definiere: $g(x) = f(x) \exp(A(x))$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \exp(A(x)) + f(x) \exp(A(x)) a(x) \\ &= \left(f'(x) + f(x) a(x) \right) \exp(A(x)) \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{= \\ 0}}$

woraus folgt: g ist konstant. $\square$