<u>Lemma 3.14.</u> Ein Vektorfeld $f: X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann konservativ, falls für jede in $X$ enthaltene geschlossene parametrisierte Kurve $\gamma$ gilt:

$$\int_\gamma f(s)\,ds = 0.$$

<u>Beweis</u> ($\Rightarrow$) Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ geschlossen, $p = \gamma(a) = \gamma(b)$.

Sei $\gamma_0 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto p$ konstante Weg.

Da $\gamma$ und $\gamma_0$ die selben Endpunkte besitzen, folgt

$$\int_\gamma f(s)\,ds = \int_{\gamma_0} f(s)\,ds.$$

Nun ist aber $\gamma_0'(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$

Also $\int_{\gamma_0} f(s)\,ds = \int_a^b f(\gamma_0(t))\cdot\gamma_0'(t)\,dt$

$= 0$

woraus $\int_{\gamma} f(s)\,ds = 0$ folgt.

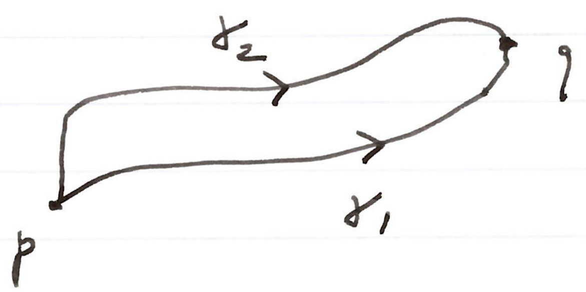
($\Longleftarrow$) Seien $p, q \in X$ und

$\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametris.

Kurven in $X$ mit

$\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = p$

$\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = q$.




Dann ist $\gamma_1 * \bar{\gamma}_2$ geschlossen. Also:

$$0 = \int_{\gamma_1 * \bar{\gamma}_2} f(s)\,ds = \int_{\gamma_1} f(s)\,ds + \int_{\bar{\gamma}_2} f(s)\,ds$$

$$= \int_{\gamma_1} f(s)\,ds - \int_{\gamma_2} f(s)\,ds.$$

$\boxed{\S}$

Beispiel 3.11: besagt, dass ein Vektorfeld $f$ der Form $f = Dg$, wobei $g: X \to \mathbb{R}$ $C^1$-Funktion, konservativ ist. Die Umkehrung gilt auch:

<u>Thm 3.15</u> ([Ko] Thm 4.1.10)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: X \to \mathbb{R}^n$ konservativ. Dann gibt es $g: X \to \mathbb{R}$ $C^1$ Funktion mit $Dg = f$.

Falls $X$ wegzusammenhängend, so ist $g$ bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

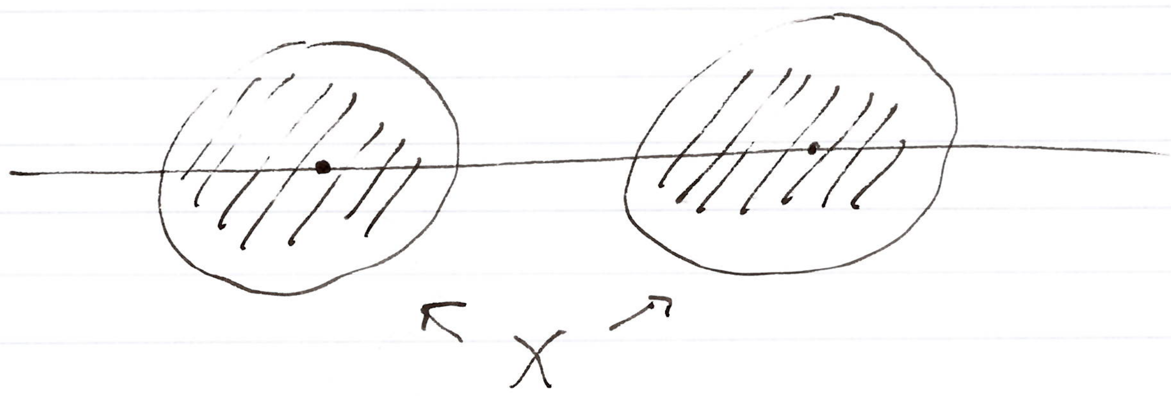
**Def. 3.16** (1) Eine offene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist Wegzusammenhängend falls jedes Paar von Punkte in $X$ die Endpunkte einer parametrisierten Kurve sind.

(2) Eine Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit $\nabla g = f$ nennt sich ein Potential für $f$.

## Beispiele 3.17

(1) Konvexe Mengen sind Wegzusammenhängend.

(2)

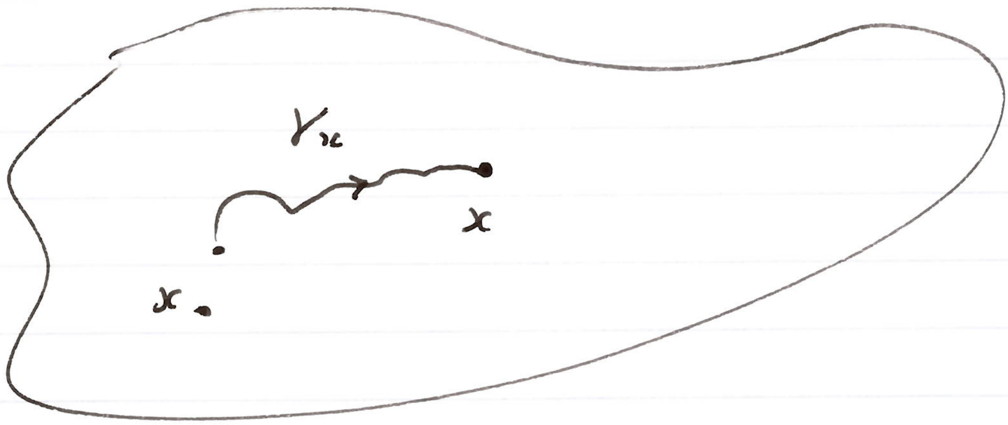


nicht wegzusammenhängend.

Beweisidee für Thm 3.15:

Sei $X$ wegzusammenhängend und

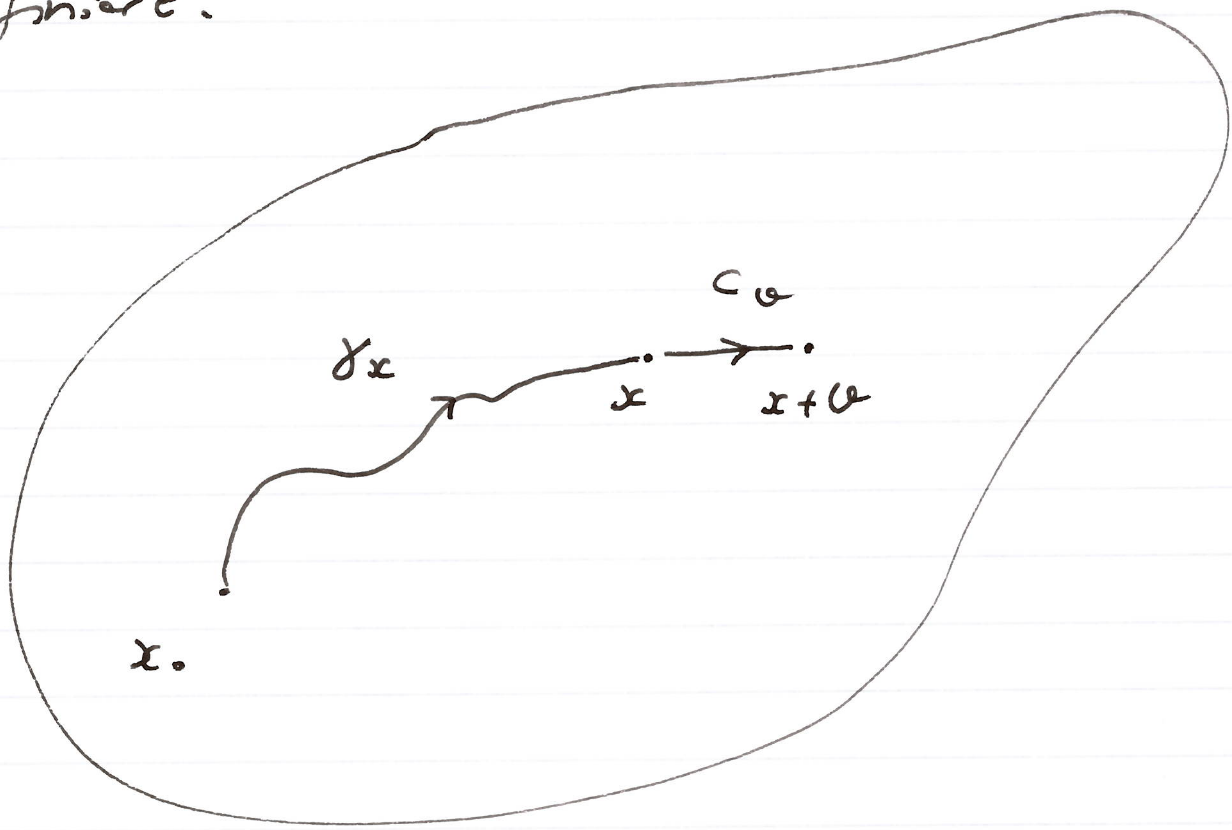
$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad x \in X.$$




Sei $x_0 \in X$ fest; für jedes $x \in X$ wählen wir eine parametrisierte Kurve $\gamma_x$ von $x_0$ nach $x$, die in $X$ enthalten ist und definieren

$$g(x) := \int_{\gamma_x} f(s)\,ds \, .$$

Da $f$ konservativ ist, ist $g$ wohldefiniert.




Sei $\varepsilon > 0$ so dass $\forall v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| < \varepsilon$ folgt $x + v \in X$. Dann ist der Weg

$$c_v : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto (1-t)x + t(x+v)$$

ganz in $X$ enthalten; er verbindet $x$ mit $x+v$.

Dann ist $g(x+v) = \int_{\gamma_x * c_v} f(s)\,ds$

$$= \int_{\gamma_x} f(s)\,ds + \int_{c_v} f(s)\,ds$$

$$= g(x) + \int_0^1 \underbrace{f((1-t)x + t(x+v))}_{f(x+tv)} \cdot v \, dt .$$

Woraus folgt:

$$g(x+v) = g(x) + f(x)\cdot v + R(x,v)$$

Wobei $R(x,v) = \int_0^1 [f(x+tv) - f(x)]\cdot v \, dt$

Aus der Stetigkeit von $f$ folgt

$$\lim_{\substack{v \to 0 \\ \neq 0}} \frac{R(x,v)}{\|v\|} = 0 .$$

folglich ist $g$ in $X$ differenzierbar und $\nabla g = f$. $\boxed{\xi}$

<u>Beispiel 3.18</u>

Sei $f : X \to \mathbb{R}^n$ konservativ.

Wie findet man ein Potential $g$?

Wir haben die Gleichungen für $g$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = f_2, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n} = f_n.$$

Aus $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = f_1(x)$ folgt

$$g(x) = \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, \ldots, x_n)\, dt + g_1(x_2, \ldots, x_n)$$

wobei $g_1$ als Funktion von $x_2, \ldots, x_n$ durch die restlichen $n-1$ Gleichungen zu bestimmen ist.

Hier ist ein konkretes Beispiel:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \cdot e^z \\ x \cdot \cos y \cdot e^z + 2y \cos z \\ x \sin y \, e^z - y^2 \sin z + \cos z \end{pmatrix}$$

Falls $\nabla g = f$ folgt:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \sin y \cdot e^z$$

$$g(x,y,z) = x \cdot \sin y \cdot e^z + g_1(y,z)$$

Aus $\dfrac{\partial g}{\partial y} = x \cos y \, e^z + 2y \cos z$

folgt $\dfrac{\partial g_1}{\partial y} = 2 \cdot y \cdot \cos z$

$$g_1(y,z) = y^2 \cdot \cos z + g_2(z)$$

d. h.

$$g(x,y,z) = x \sin y \, e^z + y^2 \cos z + g_2(z)$$

und aus $\dfrac{\partial g}{\partial z} = x \sin y \, e^{z} - y^{2} \sin z + \cos z$

folgt $g_2'(z) = \cos z$

also $g_2(z) = \sin z$.

Folglich ist

$$g(x, y, z) = x \sin y \, e^{z} + y^{2} \cos z + \sin z$$

ein Potential für $f$.

Dieses Beispiel könnte den Eindruck erwecken, dass solch ein Gleichungssystem immer eine Lösung besitzt; dies ist nicht der Fall, denn es gibt versteckte Symmetrien:

<u>Satz 3.19</u> Sei $X \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$ und $f: X \to \mathbb{R}^n$ ein $C^1$-Vektorfeld. Falls $f$ konservativ ist, gilt:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

(Wobei $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$).

<u>Beweis</u>: Nach Satz 3.15 gibt es $g: X \to \mathbb{R}$ mit $\nabla g = f$, d.h.

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = f_i(x).$$

Da $f$ $C^1$ ist, ist $g$ $C^2$ und folglich aus Satz 2.43:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \cdot \partial x_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \cdot \partial x_j}$$

woraus $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ folgt.

$\boxed{\beta}$

Zunächst bemerken wir, dass dieser Satz ein sehr effizientes Kriterium gibt um zu sehen dass ein gegebenes Vektor-feld nicht konservativ ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

<u>Beispiel 3.20.</u>

Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (y^2, xz, 1)$.

Wir betrachten zwei Kurven die $(0,0,0)$ mit $(1,1,1)$ verbinden:

$$\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma_1(t) = (t,t,t), \quad \gamma_2(t) = (t, t^2, t^3)$$

Eine lange Rechnerei (siehe [K] Example 4.1.12 (ii)) ergibt:

$$\int_{\gamma_1} f(s)\,ds = \frac{5}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} f(s)\,ds = \frac{23}{15}.$$

Also ist $f$ nicht konservativ.

Wir können alternativ Satz 3.19 benützen:

$$f_1(x,y,z) = y^2$$

$$f_2(x,y,z) = xz$$

$$f_3(x,y,z) = 1$$

Dann ist $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y$

und $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = z.$

<u>Bemerkung 3.21</u> Falls $n = 2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

so ist die notwendige Bedingung für Konservativität: $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$.

Ob diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, ist eine sehr interessante Frage. Die Antwort hängt von den globalen Eigenschaften von $X$ ab.

<u>Definition 3.22.</u> ([Ko] Def. 4.1.15)
Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist <u>sternförmig</u> falls es $x_0 \in X$ gibt so dass $\forall x \in X$ das Segment $(1-t)x_0 + tx$, $t \in [0,1]$ ganz in $X$ enthalten ist.

Beispiele 3.23

(1) Jede konvexe Menge.

(2)

(3) Falls $K_1, K_2$ konvexe Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ dann ist $K_1 \cup K_2$ sternförmig.

(4) $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig.

(5) $X$ sternförmig $\Longrightarrow$ $X$ wegzusammenhängend.

**Theorem 3.24** ([Ko] Thm 4.1.17)
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig.
Sei $f : X \to \mathbb{R}^n$ ein $C^1$-Vektorfeld
mit
$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad 1 \leq i,j \leq n$$
Dann ist $f$ konservativ.

**Bemerkung 3.25** Der Satz gilt allgemeiner für $X$ offen, einfach zusammenhängend: jede in $X$ enthaltene parametrisierte Kurve kann innerhalb $X$ stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden.
z. B. ist $\mathbb{R}^2 \setminus (0)$ nicht einfach zusammenhängend, aber $\mathbb{R}^3 \setminus (0)$ ist es.

Beispiel 3.26 ([Ko] Example 4.1.6)

(1) Auf $X = \mathbb{R}^2 \setminus (0)$ sei

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Dann ist $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein $C^1$-Vektorfeld. Ausserdem gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Also erfüllt $f$ die notwendige Bedingung für Konservativität.

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus (0)$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

der Einheitskreis um 0. Dann ist

$$\int_\gamma f(s)\,ds = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi$$

Also ist $f$ nicht konservativ.

(2) Nach Theorem 3.24 ist aber die Einschränkung von $f$ auf jede offene sternförmige Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \setminus (0)$ konservativ!

z. B. : $Y = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \}$

$g(x,y) = \arctan(y/x)$ ist auf $Y$

definiert und glatt. Es folgt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1+(y/x)^2}$$

$$= \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

also gilt $\nabla g = f$ auf $Y$.

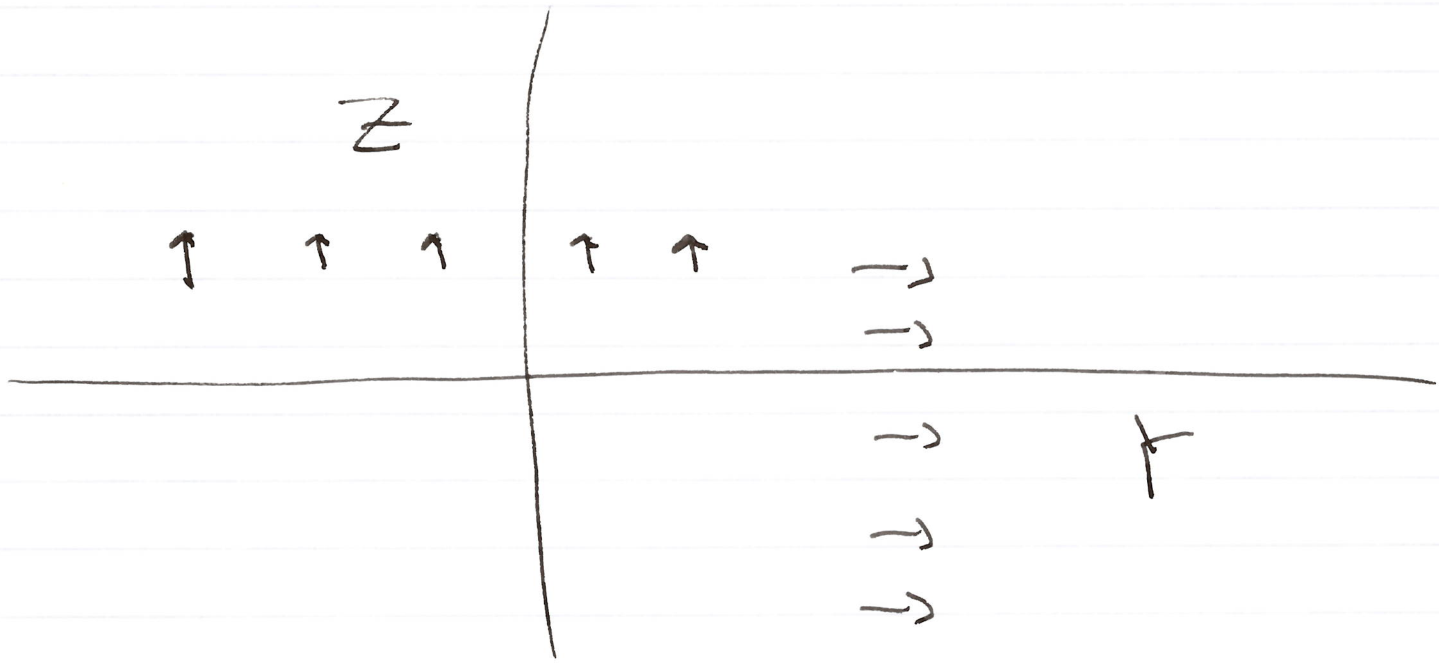
Sei $Z = \{(x,y) : y > 0\}$

dann ist $h(x,y) = \arctan(-x/y)$

auf $Z$ definiert und glatt. Dann

ergibt eine analoge Rechnung

$$\nabla h = f \quad \text{auf } Z.$$




Auf $Z \cap Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$

sind beide $g$ und $h$ wohldefiniert

und: $\nabla g = \nabla h$.

Also ist $g - h$ auf $Z \cap Y$ konstant:

in der Tat aus

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{t}\right) = \operatorname{arctg}(t) - \frac{\pi}{2}$$

für $t > 0$

folgt $h = g - \frac{\pi}{2}$ auf $Z \cap Y$.

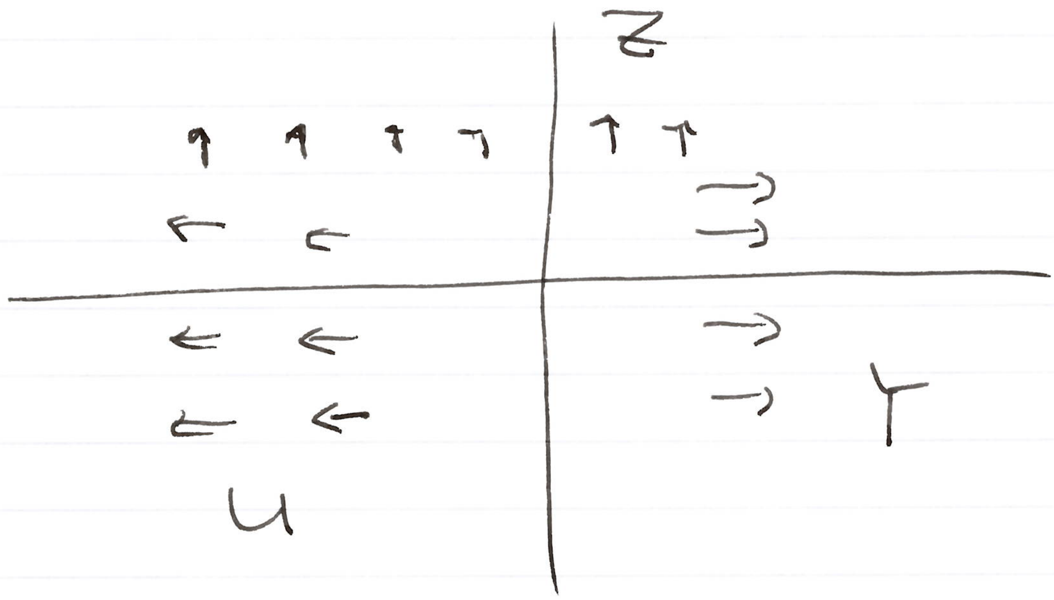
Falls wir jetzt $\tilde{g} : Y \cup Z \to \mathbb{R}$

wie folgt definieren:

$$\tilde{g} = \begin{cases} g & \text{auf } Y \\ h + \pi/2 & \text{auf } Z \end{cases}$$

dann ist $\tilde{g}$ auf $Y \cup Z$ wohldefiniert

und $D\tilde{g} = f$ auf $Y \cup Z$.




Sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$

Mit einer analogen Konstruktion kann man eine auf ganz

$$Y \cup Z \cup U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,t) : t \leq 0\}$$

definierten Funktion $\widetilde{\widetilde{g}}$ finden mit $D\widetilde{\widetilde{g}} = f$.

Übung: sei $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$.

Es gibt eine Funktion $\ell : T \to \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmt ist durch

(a) $D\ell = f$

(b) $\ell|_{U \cap T} = \widetilde{\widetilde{g}}|_{U \cap T}$.

Was ist die Relation zwischen $\ell|_{T \cap Y}$ und $g|_{T \cap Y}$?