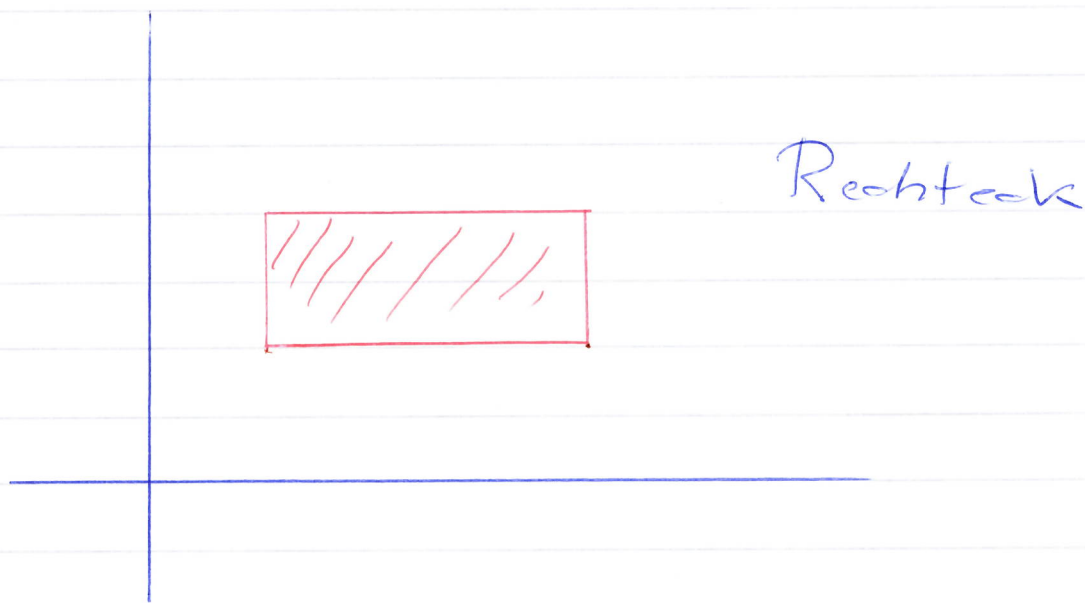


3.2. Das Riemann integral in $\mathbb{R}^n$

Das Integral einer Funktion einer Variablen repräsentiert den Flächeninhalt zwischen der x -Achse und deren Graphen. Wir werden den Integral-Begriff auf Funktionen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}^2$) erweitern so dass das Integral den Volumeninhalt zwischen der (x, y) -Ebene und der Fläche $z = f(x, y)$ berechnet.

Diese Erweiterung bringt neue Probleme mit sich weil Gebiete im $\mathbb{R}^2$ um einiges komplizierter sein können wie in $\mathbb{R}$.



Meistens sind aber Gebiete in $\mathbb{R}^2$ nicht der Form $A \times B$ mit $A, B \subset \mathbb{R}$.

Man kann allgemein das Riemann Integral in $\mathbb{R}^n$ definieren. Der wesentliche Schritt ist aber die Verallgemeinerung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2$; der Schritt von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ist dann einfach.

3.2.1. Das Integral über ein Rechteck.

Sei $R = [a, b] \times [c, d]$ ein kompaktes Rechteck in $\mathbb{R}^2$. Sei

$$f: R \rightarrow \mathbb{R}$$

beschränkt d.h.

$$\exists M \geq 0, \quad \forall (x, y) \in R, \quad |f(x, y)| \leq M.$$

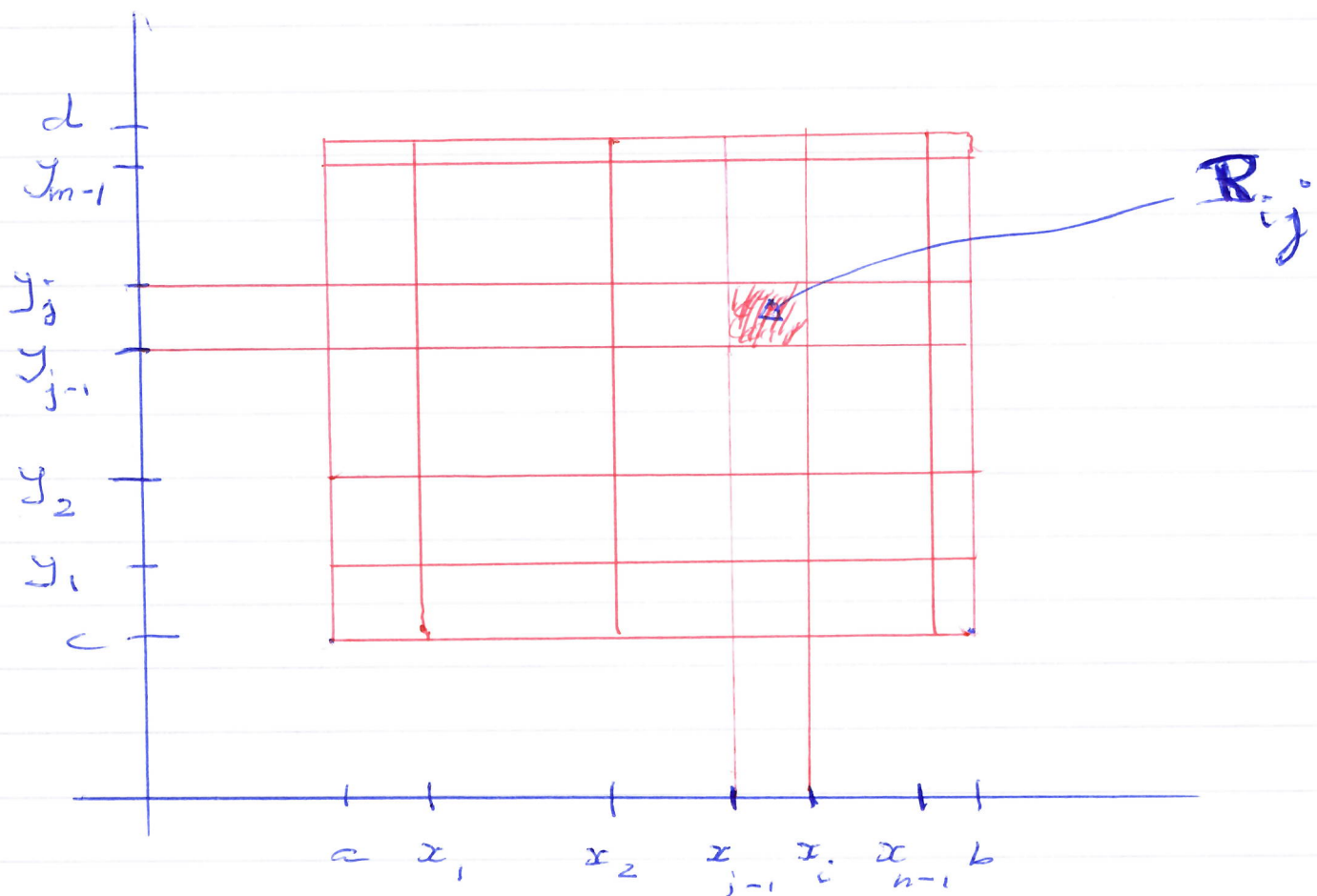
Für jede Partition

$$P_x \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{von } [a, b]$$

$$\text{und } P_y \quad y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d \quad \text{von } [c, d]$$

erhalten wir eine Zerlegung von R

$$\text{in Rechtecke} \quad R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$



mit Flächeninhalt $\mu(R_{ij}) = (x_i - x_{j-1})(y_j - y_{j-1})$.

Wie im 1-dimensionalen Fall definieren wir die zugehörigen Unter- und Obersummen. Seien

$$f_{ij} = \inf_{I_{ij}} f(x, y), \quad F_{ij} = \sup_{I_{ij}} f(x, y)$$

Dann ist die Untersumme:

$$\Delta(P_x \times P_y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij} \mu(I_{ij})$$

und Obersumme:

$$S(P_x \times P_y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{ij} \mu(I_{ij})$$

Es gilt dann das Analogon von Lemma 5.2 in Analysis I. Nämlich falls wir zu P_x (oder P_y) Punkte zufügen wird $\Delta(P_x \times P_y)$ grösser und $S(P_x \times P_y)$ kleiner, und zudem gilt

$$\Delta(P_x \times P_y) \leq S(P_x \times P_y).$$

Definition 3.27 Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

beschränkt. Dann heißt f integrierbar auf $\mathbb{R}$ falls

$$\sup_{(P_x, P_y)} A(P_x \times P_y) = \inf_{(P_x, P_y)} S(P_x \times P_y).$$

Der gemeinsame Wert wird mit

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d(x, y)$$

oder $\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) d(x, y)$ bezeichnet.

Wir erweitern diesen Begriff auf beliebige beschränkte Gebiete

$$A \subset \mathbb{R}^2$$

wie folgt:

Sei $A \subset \mathbb{R} = [a, b] \times [c, d]$

und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Definition 3.28 f ist auf A
integrierbar falls $f \cdot \chi_A$,

wobei χ_A die charakteristische Funktion
von A bezeichnet, auf $\mathbb{R}$ integrierbar
ist. Dann wird $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \chi_A(x, y) d(x, y)$ mit
 $\int_A f(x, y) d(x, y)$ bez.

Wir werden nicht in der Lage sein die
Theorie systematisch aufzubauen und
beschränken uns darauf die funda-
mentalsten Eigenschaften ~~und~~ aufzu-
listen und zeigen wie man damit
konkrete Integrale ~~aus~~ ausrechnen

kann.

(1) (Linearität, Vgl. Satz 5.19 An. I)

$f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ auf A integrierbar
 $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ dann ist $\mu f + \lambda g$ auf
 A integrierbar und

$$\int_A (\mu f(x,y) + \lambda g(x,y)) d(x,y)$$

$$= \mu \int_A f(x,y) d(x,y) + \lambda \int_A g(x,y) d(x,y)$$

(2) (Positivität, Vgl. Satz 5.20, An. I)

Seien $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar
mit $f \leq g$. Dann folgt

$$\int_A f(x,y) d(x,y) \leq \int_A g(x,y) d(x,y)$$

Daraus folgt, dass falls $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit $f \geq 0$, $B \subset A$ und (!) f auf B integrierbar:

$$\int_B f(x,y) d(x,y) \leq \int_A f(x,y) d(x,y)$$

(3) (Δ -Ungleichung, Vgl. Kor. 5.2, An I)

Sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar

(! insbes. beschränkt) so ist $|f|$

integrierbar und

$$\left| \int_A f(x,y) d(x,y) \right| \leq \int_A |f(x,y)| d(x,y).$$

auf $[c, d]$ integrierbar ist.

Dann folgt, dass

$$x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$$

auf $[a, b]$ integrierbar ist, und

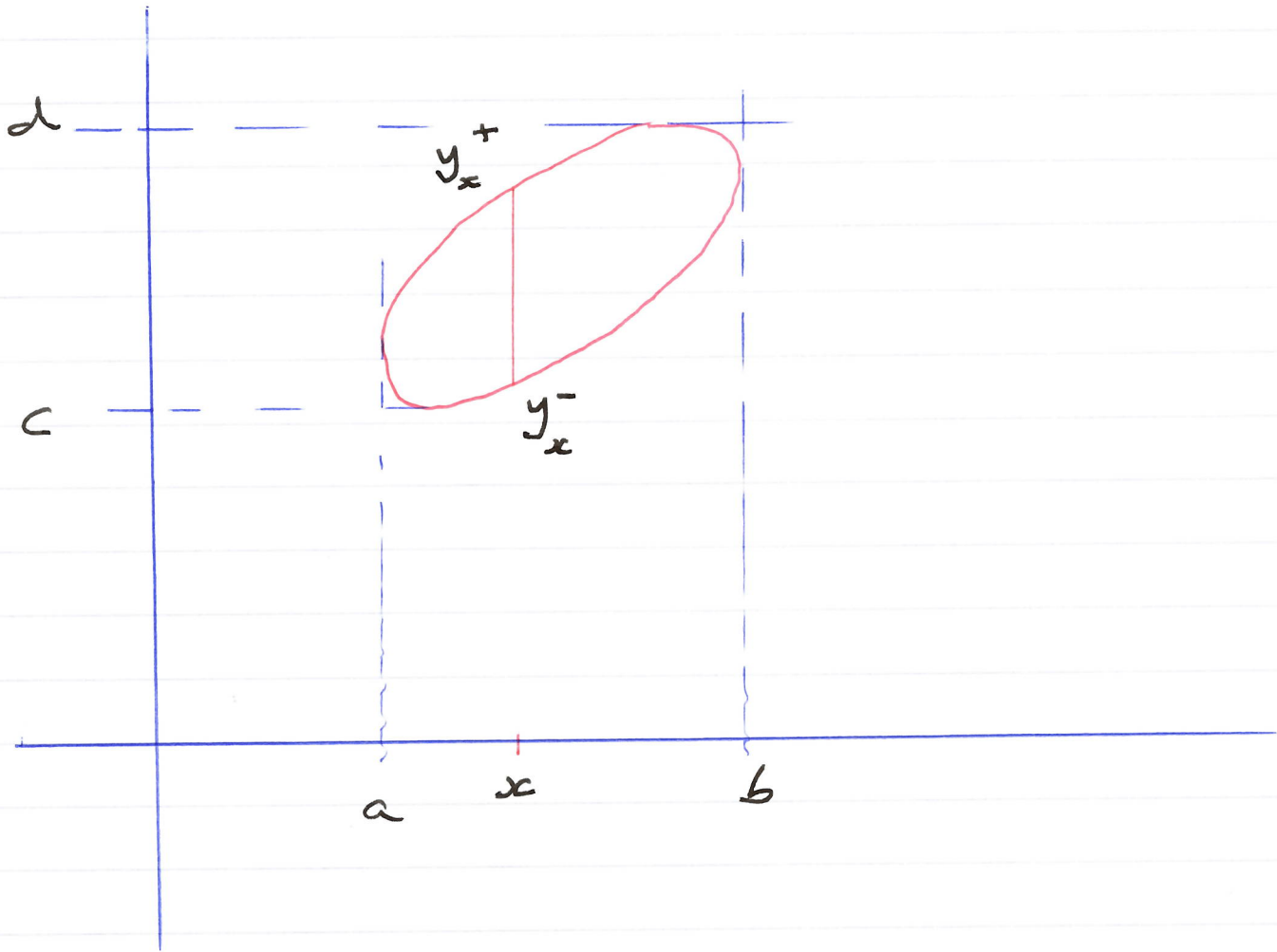
$$\int_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Beispiel 3.29 Sei $A \subset \mathbb{R}^2$,

beschränkt, abgeschlossen konvex.

Man kann zeigen, dass χ_A auf
einem Rechteck $R \supset A$ integrierbar
ist.

~171~



Dann ist

$$\text{Area}(A) = \int_R \chi_A(x,y) \, d(x,y)$$

$$= \int_a^b (y_x^+ - y_x^-) \, dx$$

Wir kommen zu einem Integrabilitätskriterium, das alle Situationen auf effiziente Art abdeckt. Es basiert auf dem Begriff der Nullmenge.

Zunächst erwähnen wir eine direkte Verallgemeinerung von Satz 5.17 An.I:

Satz 3.30. Sei $R = [a, b] \times [c, d]$

ein kompaktes Rechteck und $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf R integrierbar.

Dies folgt aus

Satz 3.31 Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte

Teilmenge und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist f gleichmäßig stetig.

Der Beweis von 3.31 ist Verbotm
der von Satz 5.15 Anal. I. Und
Satz 3.30 folgt analog wie Satz 5.17 Anal. I.

Falls man jetzt f auf einer
Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ integrieren möchte
hilft Satz 3.30 nicht viel weiter.

Def. 3.32: Sei $X \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.

Dann ist X eine Nullmenge (in $\mathbb{R}^2$)
falls es $\forall \varepsilon > 0$ endlich viele

Rechtecke $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ gibt
 $1 \leq k \leq n$, so dass

$$X \subset \bigcup_{k=1}^n R_k, \quad \sum_{k=1}^n \mu(R_k) < \varepsilon.$$

Folgendes liefert ein wichtiges
Beispiel von Nullmenge:

Lemma 3.33 . Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$
eine Lipschitz Kurve d.h.

$$\|\gamma(s) - \gamma(t)\| \leq M \cdot |s - t|$$
$$\forall s, t \in [0, 1].$$

Dann ist das Bild $\gamma([0, 1]) \subset \mathbb{R}^2$
eine Nullmenge.

Beweis:

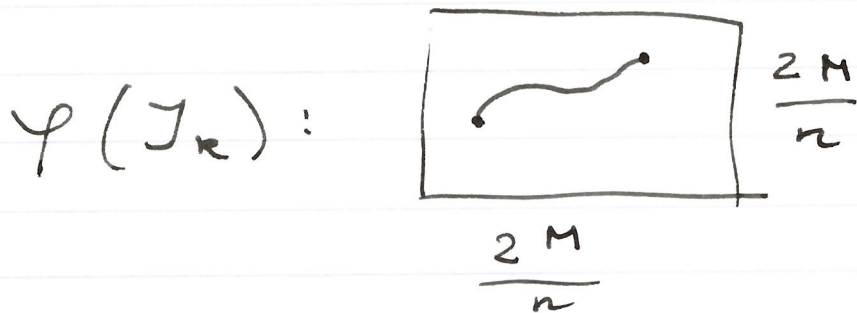
Sei $n \geq 2$ beliebig und



Dann folgt: $\forall s, t \in J_n$:

- 175 -

$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leq \frac{M}{n}$$



Dann ist $\varphi(I_k)$ in einem Quadrat Q_k mit Seitenlänge $\frac{2M}{n}$ enthalten.

Also ist:

$$\varphi([a, b]) \subset \bigcup_{k=1}^n Q_k$$

und

$$\sum_{k=1}^n \mu(Q_k) = n \cdot \left(\frac{2M}{n}\right)^2 = \frac{4M^2}{n}.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ wählen wir n so

dass $\frac{4M^2}{n} < \varepsilon$ und dann folgt

$$\sum_{k=1}^n \mu(Q_k) < \varepsilon. \quad \boxed{3}$$

Beispiel 3.34 (Übung) Der Sierpinski
Teppich ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$.

Um so erstaunlicher ist dann

Satz 3.35 Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Sei $X = \{ (x,y) \in \mathbb{R} : f \text{ ist in } (x,y)$

nicht stetig }

Falls X eine Nullmenge ist, so ist

f auf $\mathbb{R}$ integrierbar.

Beweisidee: Sei $\varepsilon > 0$ und

$$X \subset \bigcup_{k=1}^n R_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^n \mu(R_k) < \varepsilon$$

Wenn $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ so

vergrößern wir jedes R_k so dass:

$$[a_k, b_k] \subset]a'_k, b'_k[, \quad b'_k - a'_k = 2(b_k - a_k)$$

$$[c_k, d_k] \subset]c'_k, d'_k[, \quad d'_k - c'_k = 2(d_k - c_k)$$

$$J_k =]a'_k, b'_k[\times]c'_k, d'_k[\quad :$$

$$R_n \subset J_k$$

$$\text{und} \quad \sum_{k=1}^n \mu(J_k) < 4\varepsilon.$$

$$\text{Nun ist} \quad H := R \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n J_k \right)$$

abgeschlossen und beschränkt also

kompakt. Nun ist $H \cap X = \emptyset$

also ist f auf H stetig und folglich

gleichmäßig stetig. Es gibt $\varepsilon < \delta$.

$\delta > 0$ so dass

$$|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon$$

$$\text{sobald} \quad |x - \xi| < \delta, \quad |y - \eta| < \delta$$

(x, y) und (s, t) in H .

$$\text{Sei } P_x = x_0 = a < x_1 < \dots < x_\ell = b$$

$$P_y = y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d$$

Partitionen mit $\{(x_i, y_j) : 1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m\}$

enthält alle Eckpunkte der Rechtecke

$$\{I_k : 1 \leq k \leq n\}$$

$$\text{und } x_i - x_{i-1} < \delta, \quad y_j - y_{j-1} < \delta.$$

Dann ist

$$S(P_x \times P_y) = S(P_x \times P_y)$$

$$= \sum_{R_{ij} \subset H} (F_{ij} - f_{ij}) \mu(R_{ij})$$

$$+ \sum_{R_{ij} \not\subset H} (F_{ij} - f_{ij}) \mu(R_{ij})$$

die linke Summe ist $\leq \varepsilon \mu(R)$

Wegen gleichmäßiger Stetigkeit

und die rechte Summe ist $\leq \delta M \varepsilon$

Wobei M eine obere Schranke

für $|f|$ bezeichnet.

