

$$(4) \text{ Sei } R = [a, b] \times [c, d]$$

$$\text{so gilt } \int_R 1(x, y) d(x, y) = (b-a) \cdot (d-c).$$

Jetzt kommen wir zu einer Eigenschaft die es erlaubt, unter gewissen Voraussetzung, ~~die~~ $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$ auf die iterierten Berechnung von Integralen in $\mathbb{R}$ zurückzuführen.
nämlich

$$(5) \text{ (O. Stolz 1886) Sei } f: R \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{auf } R = [a, b] \times [c, d] \text{ integrierbar.}$$

Wir nehmen zudem an, dass

$$y \mapsto f(x, y) \text{ für jedes } x \in [a, b]$$

auf $[c, d]$ integrierbar ist.

Dann folgt, dass

$$x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$$

auf $[a, b]$ integrierbar ist, und

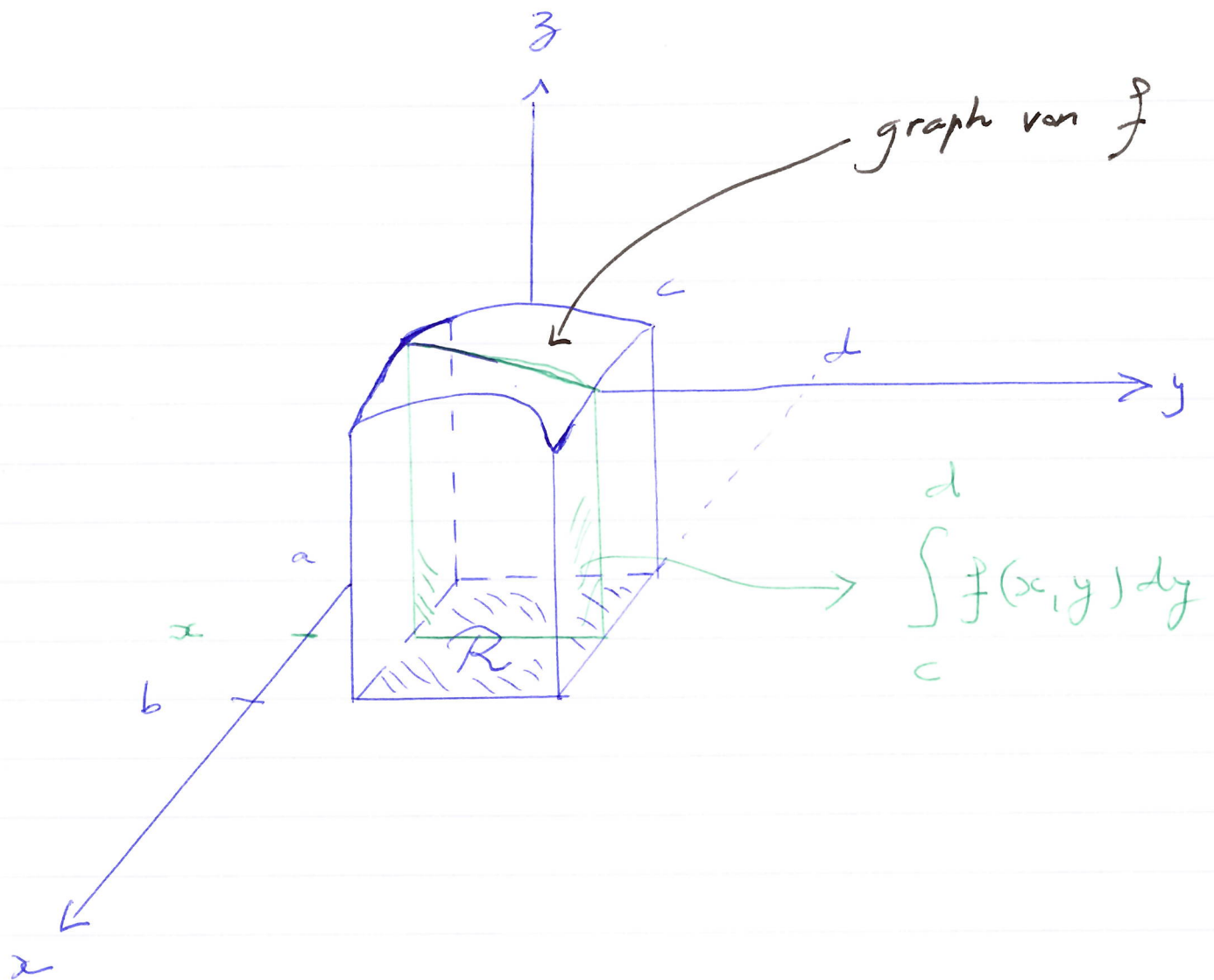
$$\int_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Beispiel 3.25 Sei $A \subset \mathbb{R}^2$,

beschränkt, abgeschlossen konvex.

Man kann zeigen, dass χ_A auf
seinem Rechteck $R \supset A$ integrierbar
ist.

- 170 bis -



$$\text{Sei } S = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq f(x, y) \text{ und } (x, y) \in R \right\}$$

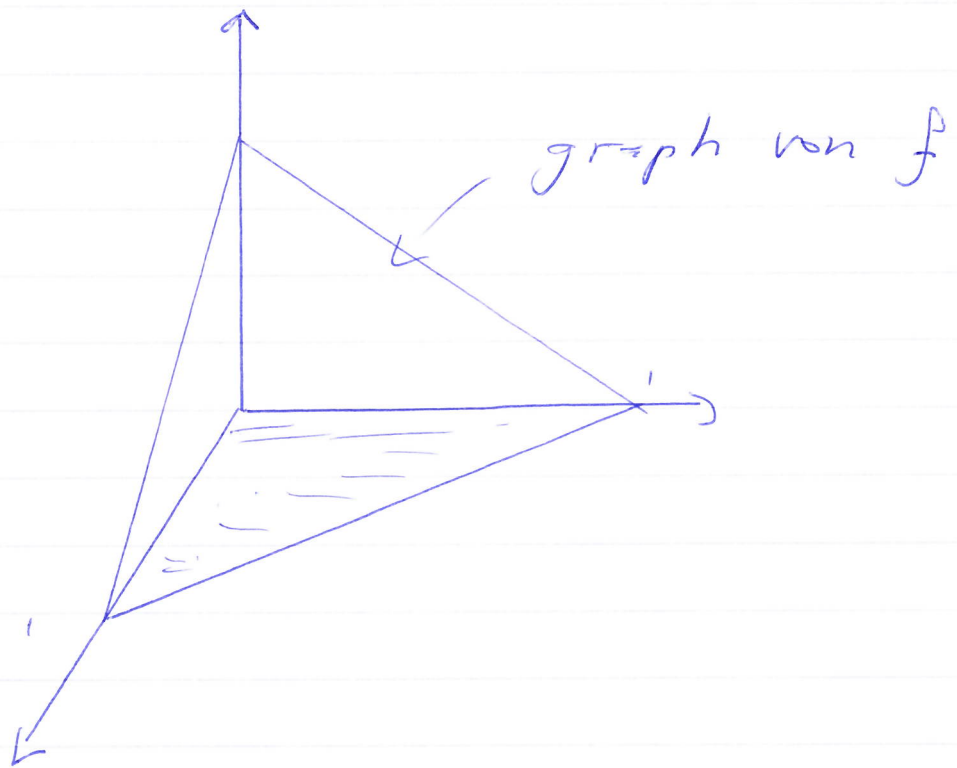
$$A(x) = \left\{ (y, z) : 0 \leq z \leq f(x, y) \text{ und } c \leq y \leq d \right\}$$

$$\text{Vol}(S) = \int_a^b \text{Fl}(A(x)) dx.$$

-170 + er -

$$R = [0, 1] \times [0, 1], \quad f: R \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = 1 - (x + y) \quad \text{falls } x + y \leq 1$$
$$= 0 \quad \text{sonst.}$$



Für $x \in [0, 1]$ ist

$$f(x, y) = \begin{cases} (1 - x) - y & 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- 1709 -

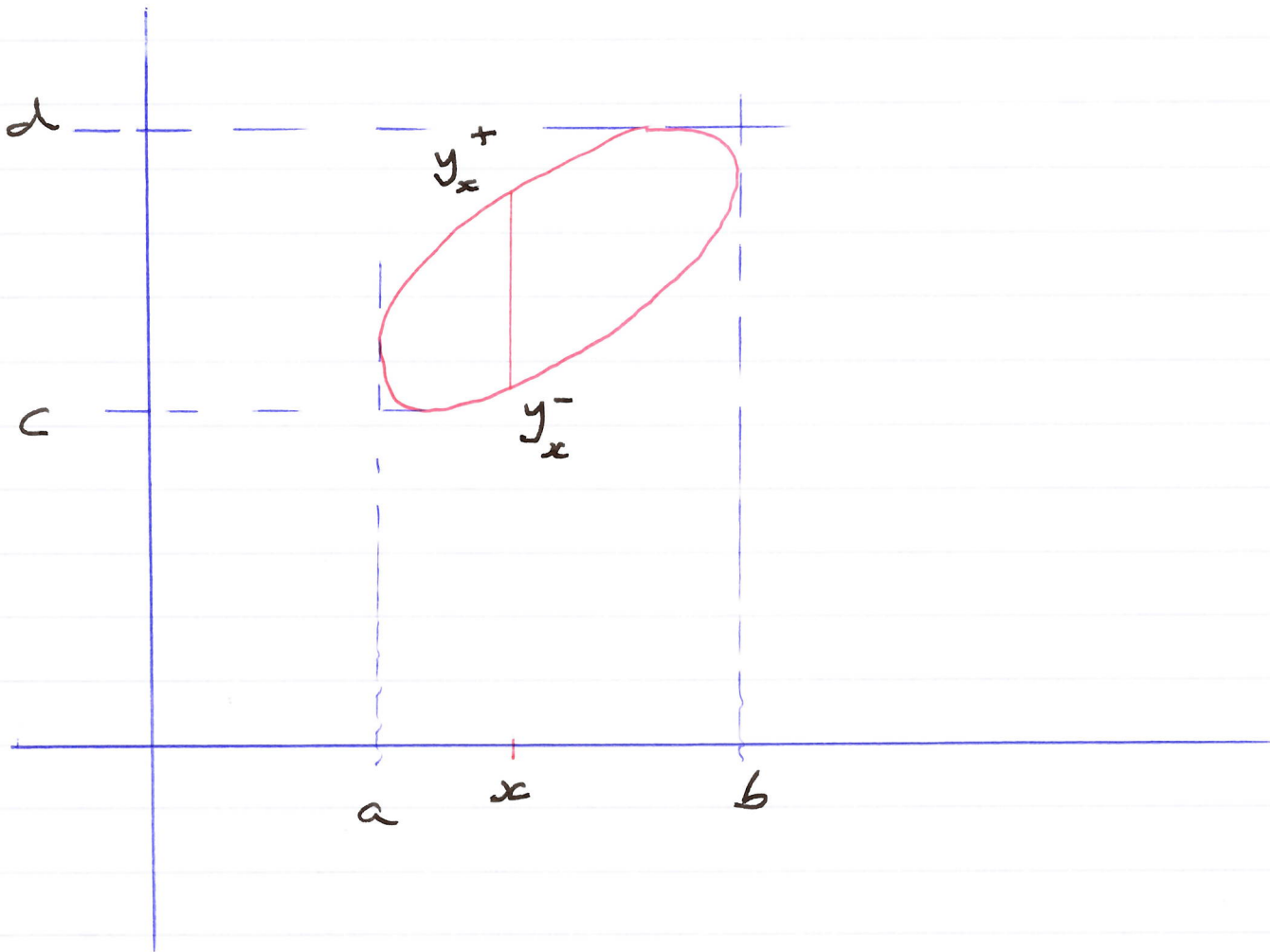
$$\text{Als: } \int_0^1 f(x,y) dy = \int_0^{1-x} [(1-x)-y] dy$$

$$= \frac{(1-x)^2}{2}.$$

Und somit

$$\int_R f(x,y) d(x,y) = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6}.$$

~171~



Dann ist

$$\text{Area}(A) = \int_R \chi_A(x,y) \, d(x,y)$$

$$= \int_a^b (y_x^+ - y_x^-) \, dx$$

Wir kommen zu einem Integrabilitätskriterium, das alle Situationen auf effiziente Art abdeckt. Es basiert auf dem Begriff der Nullmenge.

Zunächst erwähnen wir eine direkte Verallgemeinerung von Satz 5.17 An.I:

Satz 3.30. Sei $R = [a, b] \times [c, d]$

ein kompaktes Rechteck und $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf R integrierbar.

Dies folgt aus

Satz 3.31 Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte

Teilmenge und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist f gleichmäßig stetig.

Der Beweis von 3.31 ist Verbotm
der von Satz 5.15 Anal. I. Und
Satz 3.30 folgt analog wie Satz 5.17 Anal. I.

Falls man jetzt f auf einer
Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ integrieren möchte
hilft Satz 3.30 nicht viel weiter.

Def. 3.32: Sei $X \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.

Dann ist X eine Nullmenge (in $\mathbb{R}^2$)
falls es $\forall \varepsilon > 0$ endlich viele

Rechtecke $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ gibt
 $1 \leq k \leq n$, so dass

$$X \subset \bigcup_{k=1}^n R_k, \quad \sum_{k=1}^n \mu(R_k) < \varepsilon.$$

Beispiele von Nullmengen.

(1) $P \subset \mathbb{R}^2$, $\text{Card } P < +\infty$ ist eine Nullmenge.

(2) Endliche Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

(3) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

(4) $I = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y=0, a \leq x \leq b \}$

ist eine Nullmenge:

$$I \subset [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] = R_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

und $\mu(R_\varepsilon) = (b-a) \cdot 2\varepsilon$.

Folgendes liefert ein wichtiger
Beispiel von Nullmenge:

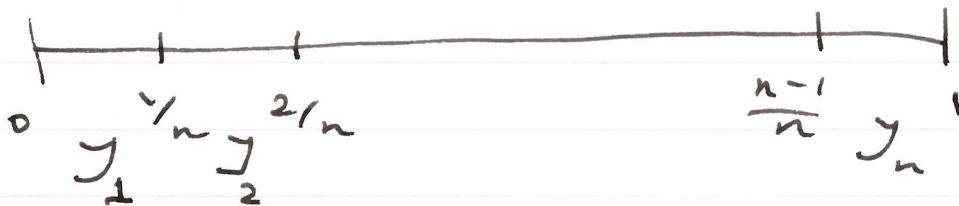
Lemma 3.33 . Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$
eine Lipschitz Kurve d.h.

$$\|\gamma(s) - \gamma(t)\| \leq M \cdot |s - t|$$
$$\forall s, t \in [0, 1].$$

Dann ist das Bild $\gamma([0, 1]) \subset \mathbb{R}^2$
eine Nullmenge.

Beweis:

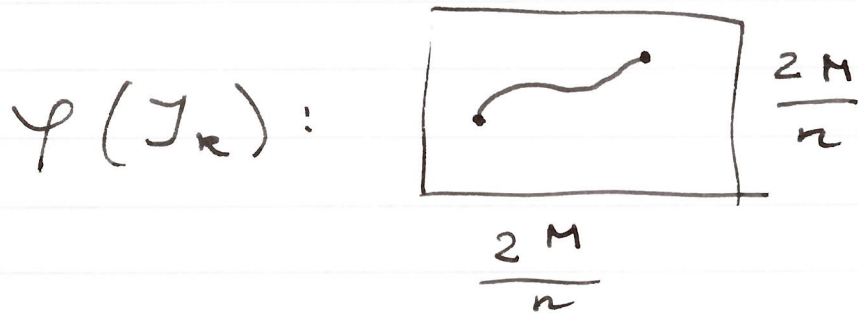
Sei $n \geq 2$ beliebig und



Dann folgt: $\forall s, t \in J_n$:

- 175 -

$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leq \frac{M}{n}$$



Dann ist $\varphi(I_k)$ in einem Quadrat Q_k mit Seitenlänge $\frac{2M}{n}$ enthalten.

Also ist:

$$\varphi([a, b]) \subset \bigcup_{k=1}^n Q_k$$

und

$$\sum_{k=1}^n \mu(Q_k) = n \cdot \left(\frac{2M}{n}\right)^2 = \frac{4M^2}{n}.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ wählen wir n so

dass $\frac{4M^2}{n} < \varepsilon$ und dann folgt

$$\sum_{k=1}^n \mu(Q_k) < \varepsilon. \quad \boxed{3}$$

Beispiel 3.34 (Übung) Der Sierpinski
Teppich ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$.

Um so erstaunlicher ist dann

Satz 3.35 Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Sei $X = \{ (x, y) \in \mathbb{R} : f \text{ ist in } (x, y)$

nicht stetig }

Falls X eine Nullmenge ist, so ist
 f auf $\mathbb{R}$ integrierbar.

Beweisidee: Sei $\varepsilon > 0$ und

$$X \subset \bigcup_{k=1}^n R_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^n \mu(R_k) < \varepsilon$$

Wenn $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ so

vergrößern wir jedes R_k so dass:

$$[a_k, b_k] \subset]a'_k, b'_k[, \quad b'_k - a'_k = 2(b_k - a_k)$$

$$[c_k, d_k] \subset]c'_k, d'_k[, \quad d'_k - c'_k = 2(d_k - c_k)$$

$$J_k =]a'_k, b'_k[\times]c'_k, d'_k[\quad :$$

$$R_n \subset J_k$$

und
$$\sum_{k=1}^n \mu(J_k) < 4\varepsilon.$$

Nun ist
$$H := R \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n J_k \right)$$

abgeschlossen und beschränkt also

kompakt. Nun ist $H \cap X = \emptyset$

also ist f auf H stetig und folglich

gleichmäßig stetig. Es gibt also

$\delta > 0$ so dass

$$|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon$$

so dass $|x - \xi| < \delta, \quad |y - \eta| < \delta$

(x, y) und (ξ, η) in H .

$$\text{Sei } P_x = x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$P_y = y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d$$

Partitionen mit $\{(x_i, y_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$

enthält alle Eckpunkte der Rechtecke

$$\{I_k : 1 \leq k \leq n\}$$

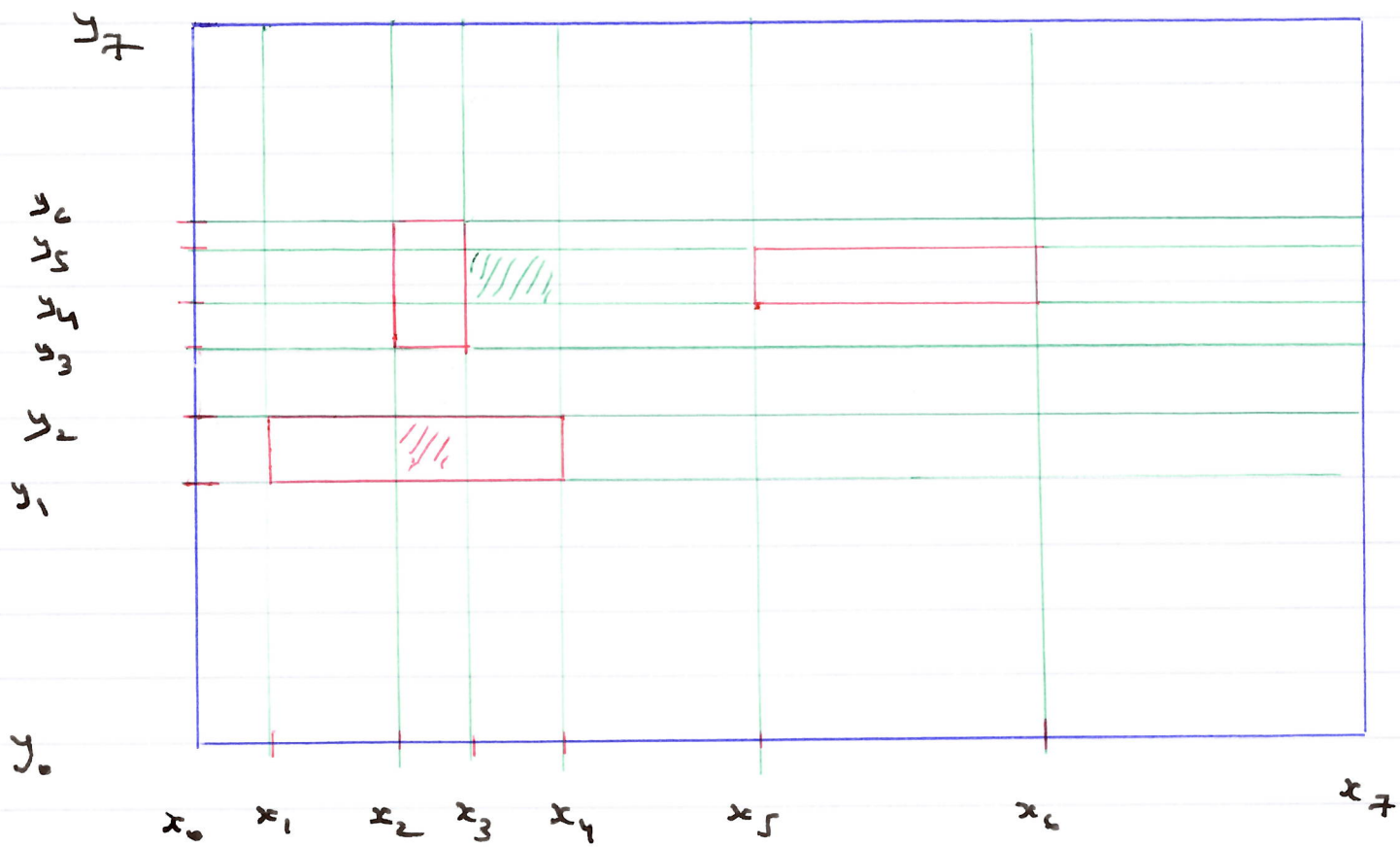
$$\text{und } x_i - x_{i-1} < \delta, \quad y_j - y_{j-1} < \delta.$$

Dann ist

$$S(P_x \times P_y) = S(P_x \times P_y)$$

$$= \sum_{R_{ij} \subset H} (F_{ij} - f_{ij}) \mu(R_{ij})$$

$$+ \sum_{R_{ij} \not\subset H} (F_{ij} - f_{ij}) \mu(R_{ij})$$



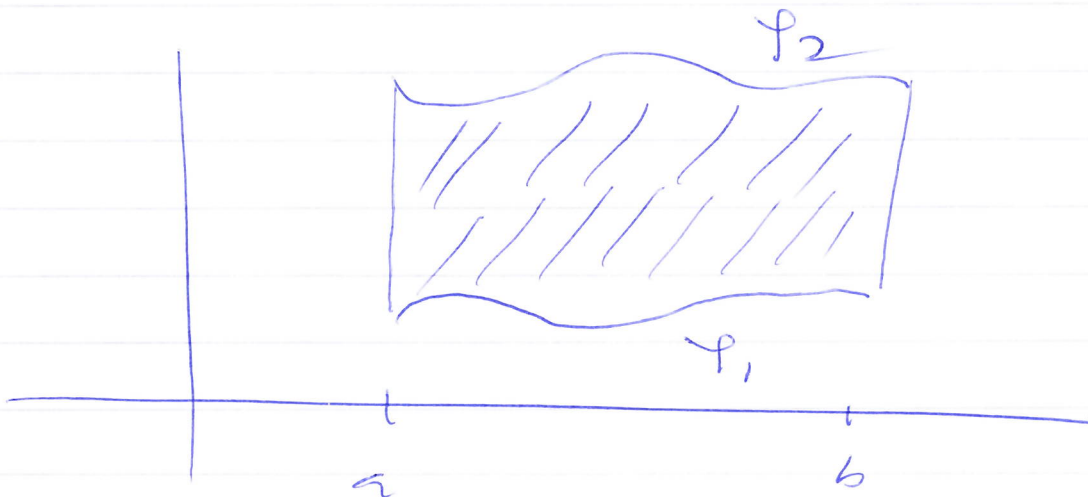
die linke Summe ist $\leq \varepsilon \mu(R)$

Wegen gleichmäßiger Stetigkeit

und die rechte Summe ist $\leq \delta M \varepsilon$

Wobei M eine obere Schranke
für $|f|$ bezeichnet. $\square$

Als Anwendung leiten wir jetzt eine
allgemeine Integrationsformel her,
über Gebiete der Form



Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
mit $\gamma_1(x) \leq \gamma_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Sei $A = \left\{ (x, y) : a \leq x \leq b, \right.$
 $\left. \gamma_1(x) \leq y \leq \gamma_2(x) \right\}$.

Satz 3.36. Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

stetig. Dann ist f auf A integrierbar
und es gilt:

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_a^b dx \int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} f(x, y) dy.$$

Dies beruht auf:

Lemma 3.37: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig. Dann ist $\text{graph}(\gamma) = \left\{ (x, \gamma(x)), \right.$
 $\left. x \in [a, b] \right\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge.

Beweis: Aus Analysis I wissen wir,
dass φ auf $[a, b]$ integrierbar ist.
Daraus folgt (Satz 5.4. Analysis I)
dass es $\forall \varepsilon > 0$ eine Partition
 $x_0 = a < x_1 < \dots < b = x_n$ gibt mit

$$\sum_{i=1}^n \left[\sup_{[x_{i-1}, x_i]} \varphi - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \varphi \right] (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Seien also $\bar{y}_i := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \varphi$, $\bar{y}_i^+ = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} \varphi$

und $R_i := [x_{i-1}, x_i] \times [\bar{y}_i, \bar{y}_i^+]$.

Dann ist $\text{graph}(\varphi) \subset \bigcup_{i=1}^n R_i$:

$$\text{und} \quad \sum_{i=1}^n \mu(R_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i^+ - \bar{y}_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

□

Beweis Satz 3.36.

Aus der Stetigkeit von φ_1 und φ_2

folgt, dass es $c, d \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$c \leq \varphi_1(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{und}$$

$$\varphi_2(x) \leq d \quad \forall x \in [a, b]. \quad \text{Folglich:}$$

$$A \subset [a, b] \times [c, d] := R$$

Die Menge der Punkte $(x, y) \in R$

wo $f \cdot \chi_A$ nicht stetig ist, ist

$$\text{in } (\{a\} \times [c, d]) \cup \text{graph}(\varphi_1) \cup \text{graph}(\varphi_2) \cup \\ \cup (\{b\} \times [c, d])$$

enthalten und deshalb nach Lemma 3.37

eine Nullmenge. Folglich ist f auf

A integrierbar. Für jedes x , ist

$f: y \mapsto f(x, y)$ auf $[y_1(x), y_2(x)]$ stetig
und deswegen integrierbar. Der $\int_0^5$
von Stolz impliziert dann die Formel
in Satz 3.36. $\square$

Anwendung: Berechne das vom
Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ um-
schlossene Volumen.

Dieser Bereich liegt zwischen den
graphen der Funktionen ~~f~~ $\rightarrow$

$$g(x, y) = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

und $f(x, y) = -g(x, y)$

wobei: $(x, y) \in S = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

Der Volumeninhalt ist:

$$V = \int_S (g(x,y) - f(x,y)) \, d(x,y)$$

= Nach Satz 3.36

$$= 8c \int_0^a \left[\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dy \right] dx$$

Sei $u := \sqrt{1 - x^2/a^2}$ dann ist das

innere Integral gleich

$$\int_0^{bu} \sqrt{u^2 - \frac{y^2}{b^2}} \, dy = u \int_0^{bu} \sqrt{1 - \frac{y^2}{(ub)^2}} \, dy$$

Mittels $y = u \cdot b \cdot \sin t \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$dy = u \cdot b \cdot \cos t \, dt$$

- 185 -

erhalten wir

$$\int_0^{bu} \sqrt{u^2 - \frac{y^2}{b^2}} = u \cdot \int_0^{\pi/2} u \cdot b \cdot \cos^2 t \, dt$$

$$= \frac{\pi}{4} u^2 b$$

$$= \frac{\pi b}{4} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Also:

$$V = 8c \int_a^b \frac{\pi b}{4} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi a b c.$$

Bemerkungen : Es gilt natürlich

die symmetrische Version vom Satz von

Stolz : $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar,

$R = [a, b] \times [c, d]$. Nehmen an,

$\forall y \in [c, d]$ ist $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x, y)$

integrierbar. Dann folgt, dass

$$y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$$

auf $[c, d]$ integrierbar ist, und:

$$\int_R f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Es gilt dann ein Analogon von Satz 3.3c

- 185 - 2 -

nämlich: falls $\psi_1, \psi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$
stetig mit $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ und

$$B = \left\{ (x, y) : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \right. \\ \left. c \leq y \leq d \right\}$$

$f: B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann folgt:

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{c \leq y \leq d} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

3.2.2. Variablensubstitution in Doppelintegrale.

In Analysis I haben wir gesehen
dass Variablensubstitution ein nützliches
Werkzeug bildet zur Berechnung von
Integralen. Eine Version, die wir
auf $\mathbb{R}^2$ verallgemeinern wollen, lautet:

Sei $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ bijektiv
und C^1 . Sei $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$
stetig, dann gilt:

$$\int_a^b f(\phi(x)) dx = \int_c^d f(\phi(u)) |\phi'(u)| du.$$

Der Absolutbetrag $|\phi'(u)|$ korrigiert

des Vorzeichens falls $\phi'(u) < 0 \quad \forall u \in]a, b[$.

Sei noch $A \subset \mathbb{R}^2$ dann ist der Rand
von A :

$\partial A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \forall \delta > 0 \text{ ist der Durch-} \right.$
schnitt von $]x-\delta, x+\delta[\times]y-\delta, y+\delta[$ mit A
und $\mathbb{R}^2 \setminus A$ nicht leer $\left. \right\}$.



Satz 3.38.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & & \\ \text{offen } U & & \\ U & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^2 \\ U & & \\ B & \longrightarrow & A \xrightarrow{f} \mathbb{R} \end{array}$$

wobei Φ eine C^1 -Abbildung und f eine stetige Funktion bezeichnen.

Annahmen:

(i) $\Phi(B) = A$; A, B compact;
 $\partial A, \partial B$ Nullmengen.

(ii) $\Phi: B \setminus N \rightarrow A$ injektiv wobei
 $N \subset B$ Nullmenge.

Dann folgt:

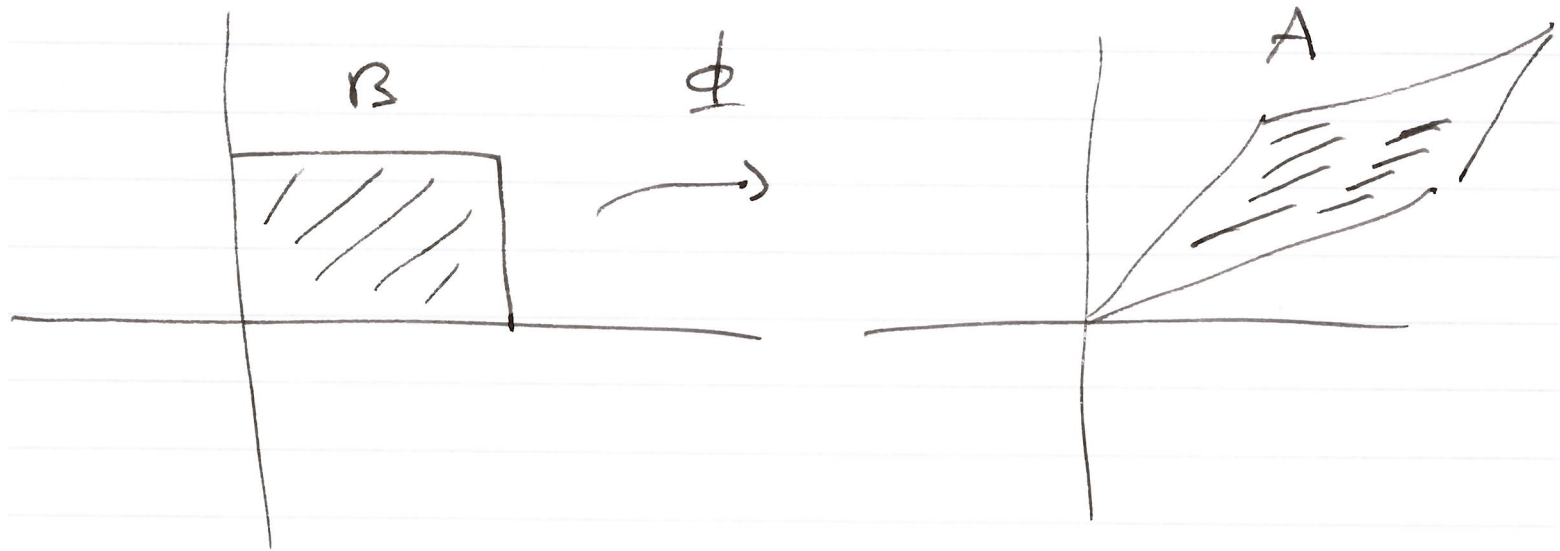
$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_B f(\Phi(u, v)) \left| \det \frac{J(\Phi(u, v))}{\Phi} \right| d(u, v).$$

Beispiel : Sei $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine
Lineare Abbildung ; dann ist

$$J_{\Phi}(u, v) = M_{\Phi} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

die Matrix von Φ in der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Sei } B = [0, 1] \times [0, 1]$$



dann ist $A = \Phi(B)$ das von $\Phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\Phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannte parallelogramm und

mit $J \equiv 1$

- 190 -

ist die Aussage:

$$Fl(A) = |\det M_{\Phi}|.$$

Eine der wichtigsten Anwendungen

von Satz 3.38 ist wenn

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

Wenn

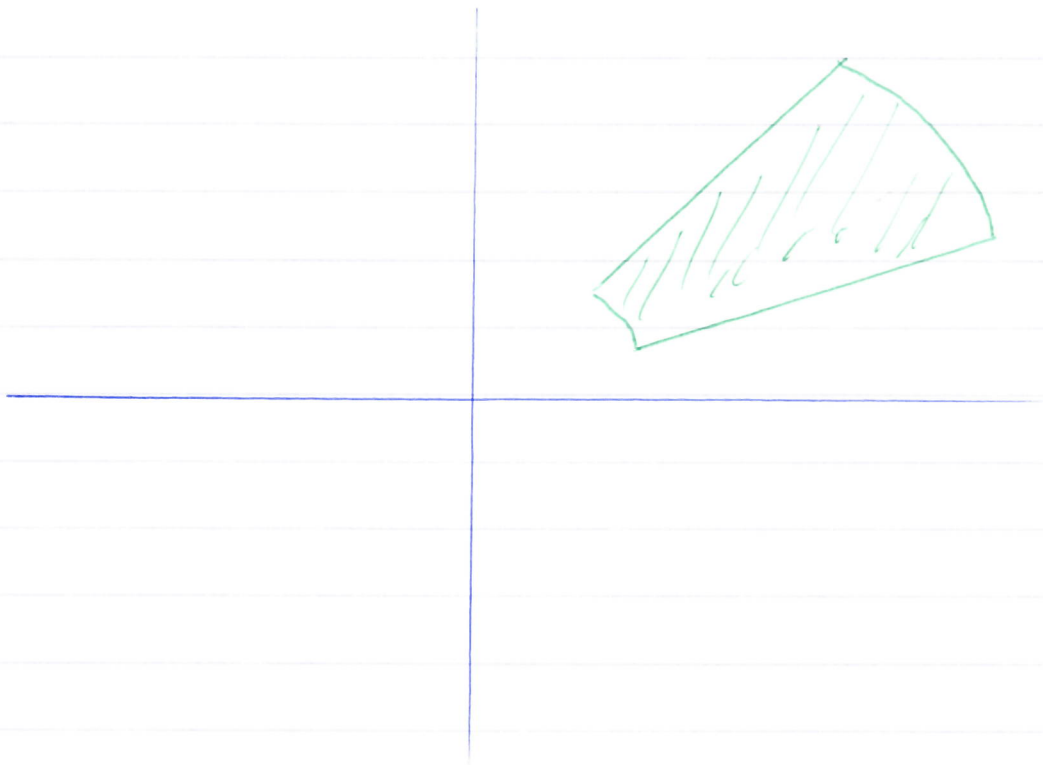
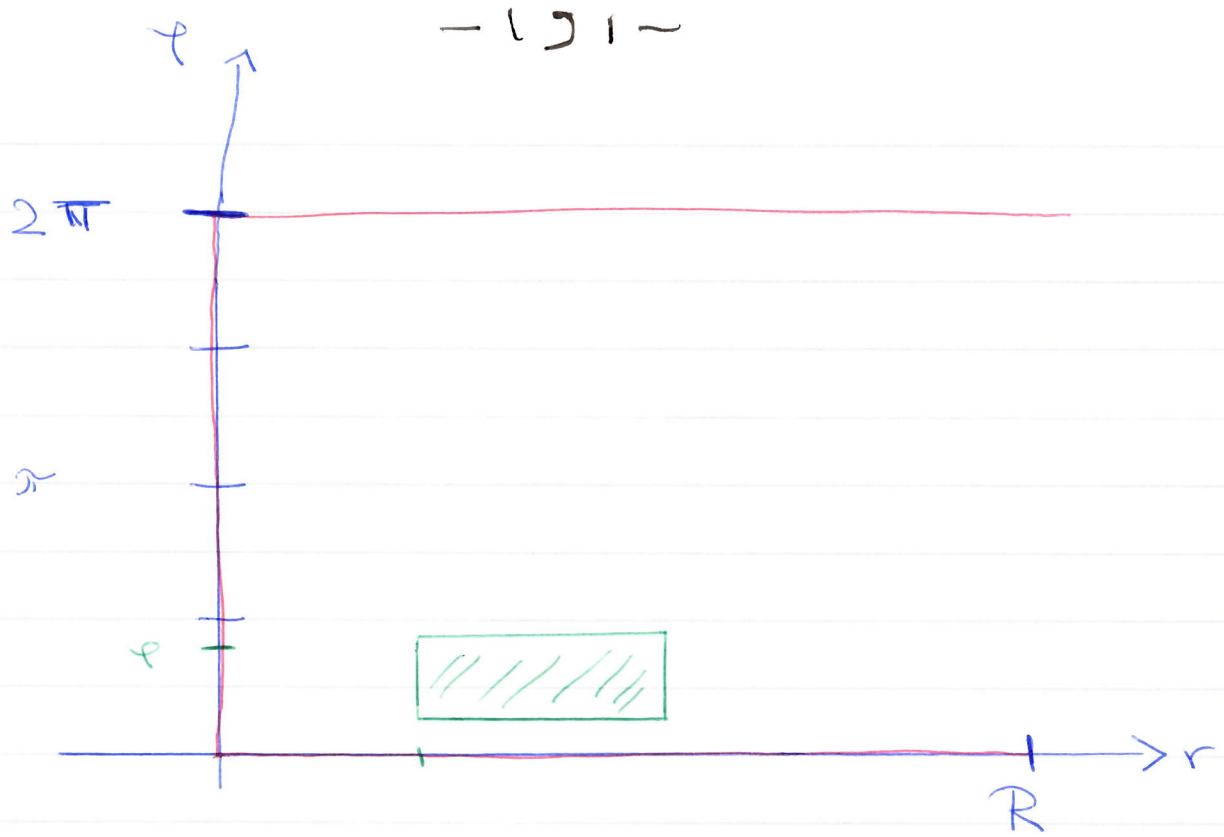
$$A = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2 \}$$

und

$$B = \{ (r, \varphi) : r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi] \}$$

Dann ist $\Phi(r, 0) = \Phi(r, 2\pi) \quad \forall r \geq 0$

$$\Phi(0, \varphi) = \Phi(0, 0) \quad \forall \varphi.$$



Sei $N = (\{0\} \times [0, 2\pi]) \cup ([0, R] \times 2\pi)$

dann ist $N \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge

und $\Phi: B \setminus N \rightarrow A$ ist injektiv.

Zudem:

$$J_{\Phi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Also

$$\det J_{\Phi}(r, \varphi) = r$$

Und somit folgt:

$$\int_{x^2 + y^2 \leq R^2} f(x, y) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi).$$

Anwendung 1. (Gausssche Integral).

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Dies ist ein uneigentliches Integral
(siehe 5.8 Analysis). Durch die

Substitution $x^2 = t$ erhält man

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1/2} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Wobei Γ die Gamma Funktion von
Analysis I bezeichnet:

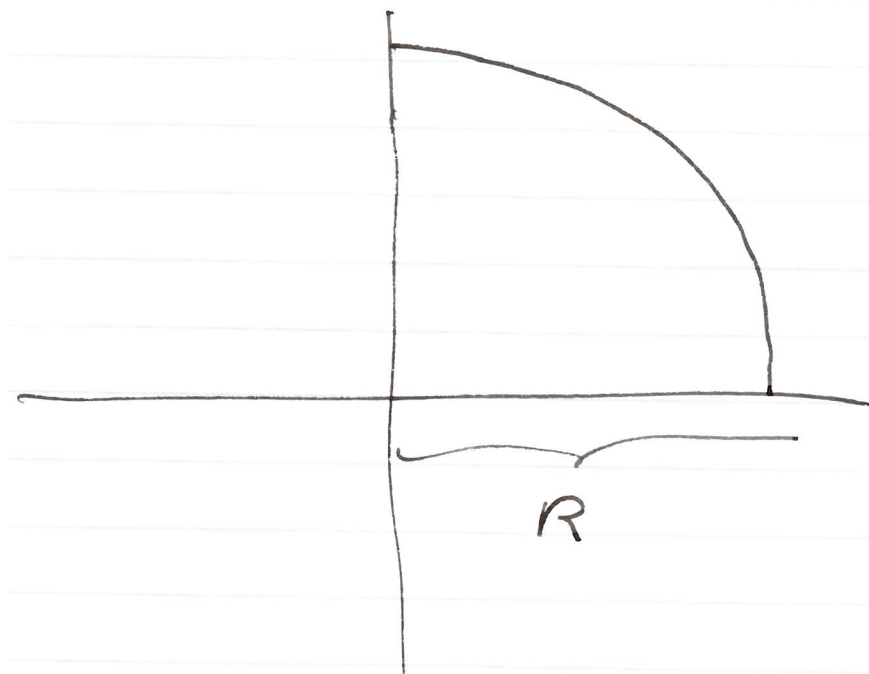
$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}, \quad s > 0.$$

Sei $R > 0$: dann ist

$$\int_{[0, R] \times [0, R]} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \int_0^R \int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2} dy dx$$

$$= \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^R e^{-y^2} dy \right).$$

Sei jetzt $D_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$



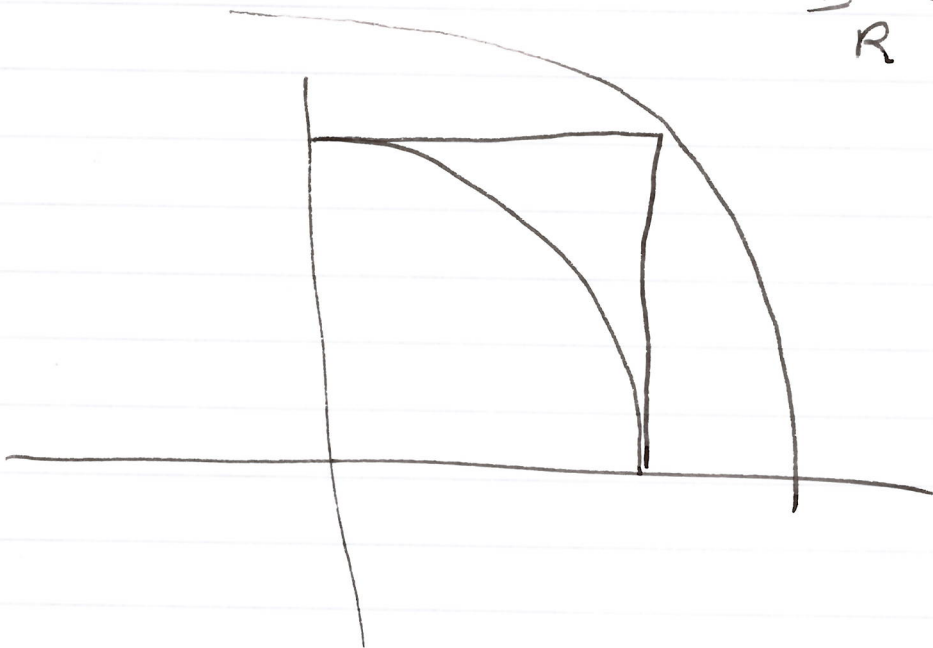
Dann ist

$$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[1 - e^{-R^2} \right]$$

$$\text{Also: } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \frac{\pi}{4}$$

Nun bemerken wir: $D_R \subset [0, R]^2 \subset D_{R \cdot R}$



Woraus folgt:

$$\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) \leq \int_{[0,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$

$$\leq \int_{\sqrt{2} \cdot R} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y)$$

Also $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[0,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

Und folglich

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Anwendung 2: Eine Produktformel
für die Gamma Funktion.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx,$$

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\beta-1} dx$$

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[0,R]^2} e^{-(x+y)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} dx dy$$

Sei $\phi(u,v) = \binom{u-v}{v} = \binom{x}{y}$

Dann ist das Bild von

$$B_R = \{(u,v) : 0 \leq v \leq u, 0 \leq u \leq R\}$$

gleich

$$A_R = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq R\}$$

- 198 -

$$J_{\phi}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also $\det J_{\phi}(u, v) = 1.$

Und

$$\int e^{-(x+y)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} d(x, y)$$

AR

$$= \int e^{-u} (u-v)^{\alpha-1} v^{\beta-1} d(u, v)$$

B_R

$$= \int_0^R e^{-u} \left(\int_0^u (u-v)^{\alpha-1} v^{\beta-1} dv \right) du$$

$$= \int_0^R e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} du \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt}_{B(\alpha, \beta)}$$

- 199 -

Woraus folgt:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Wobei

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt.$$