

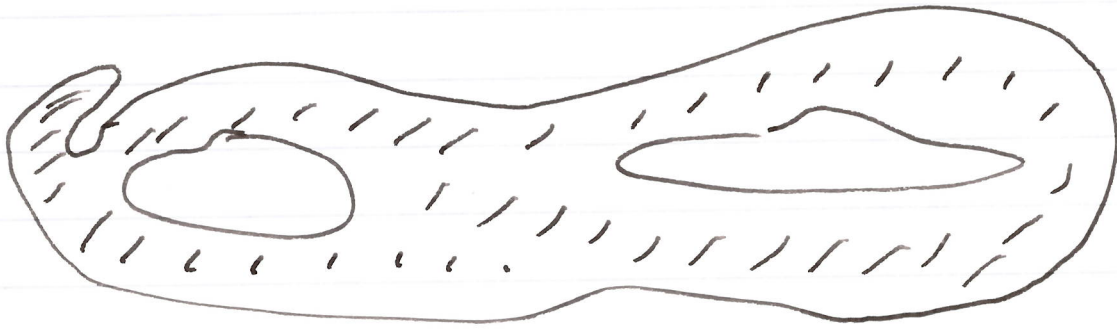
3.3. Der Satz von Green.

Der Satz von Green ist eine Verallgemeinerung in $\mathbb{R}^2$ vom Fundamentalsatz der Analysis in $\mathbb{R}$; nämlich

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx$$

wobei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion bezeichnet.

Der Satz von Green stellt eine Beziehung her zwischen einem Linienelementintegral und einem Doppelintegral über den von der parametrisierten Kurve umschlossenen Bereich.



Eine Schwierigkeit liegt in der Definition der relevanten Objekte: wir brauchen die Begriffe der (parametrisierten) Jordan Kurve und der Orientierung.

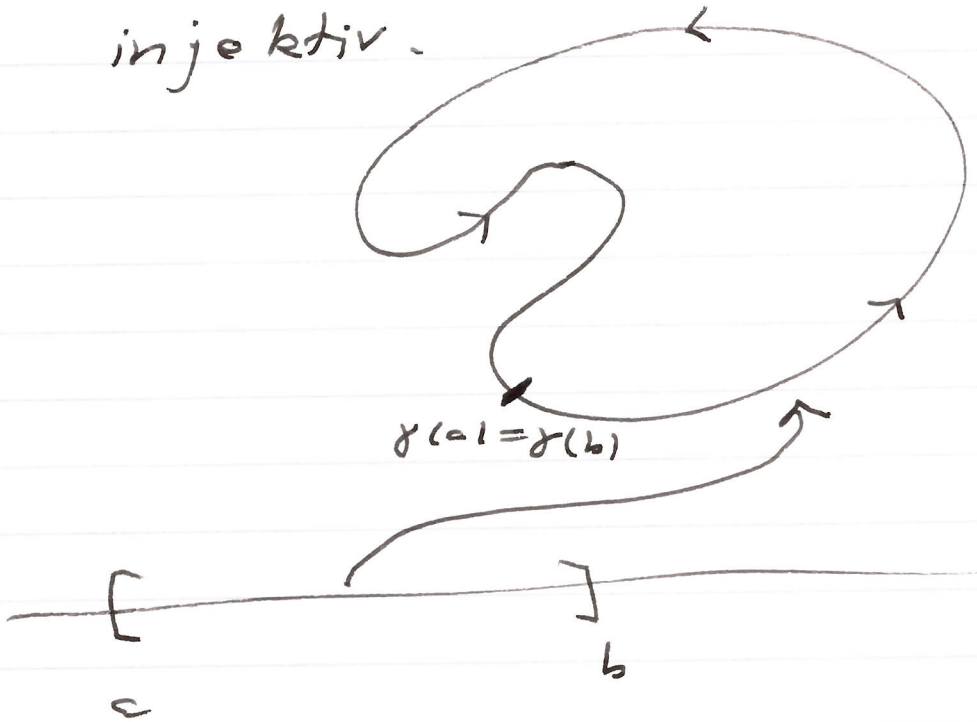
Def. 3.39 : (A) Eine parametrisierte Jordan Kurve ist eine parametrisierte Kurve (siehe Def. 3.1) $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:

- 202 -

$$(1) \gamma(a) = \gamma(b)$$

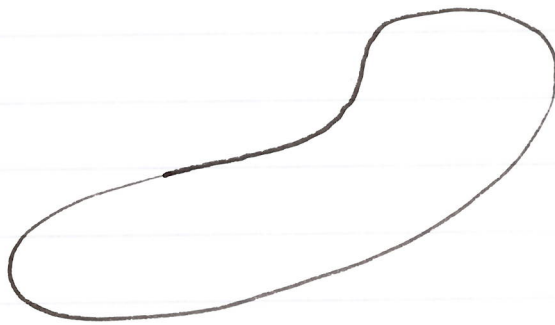
$$(2) \gamma :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ist}$$

injektiv.



(B) Eine Jordan Kurve in $\mathbb{R}^2$ ist

das Bild einer parametrisierten Jordan Kurve.



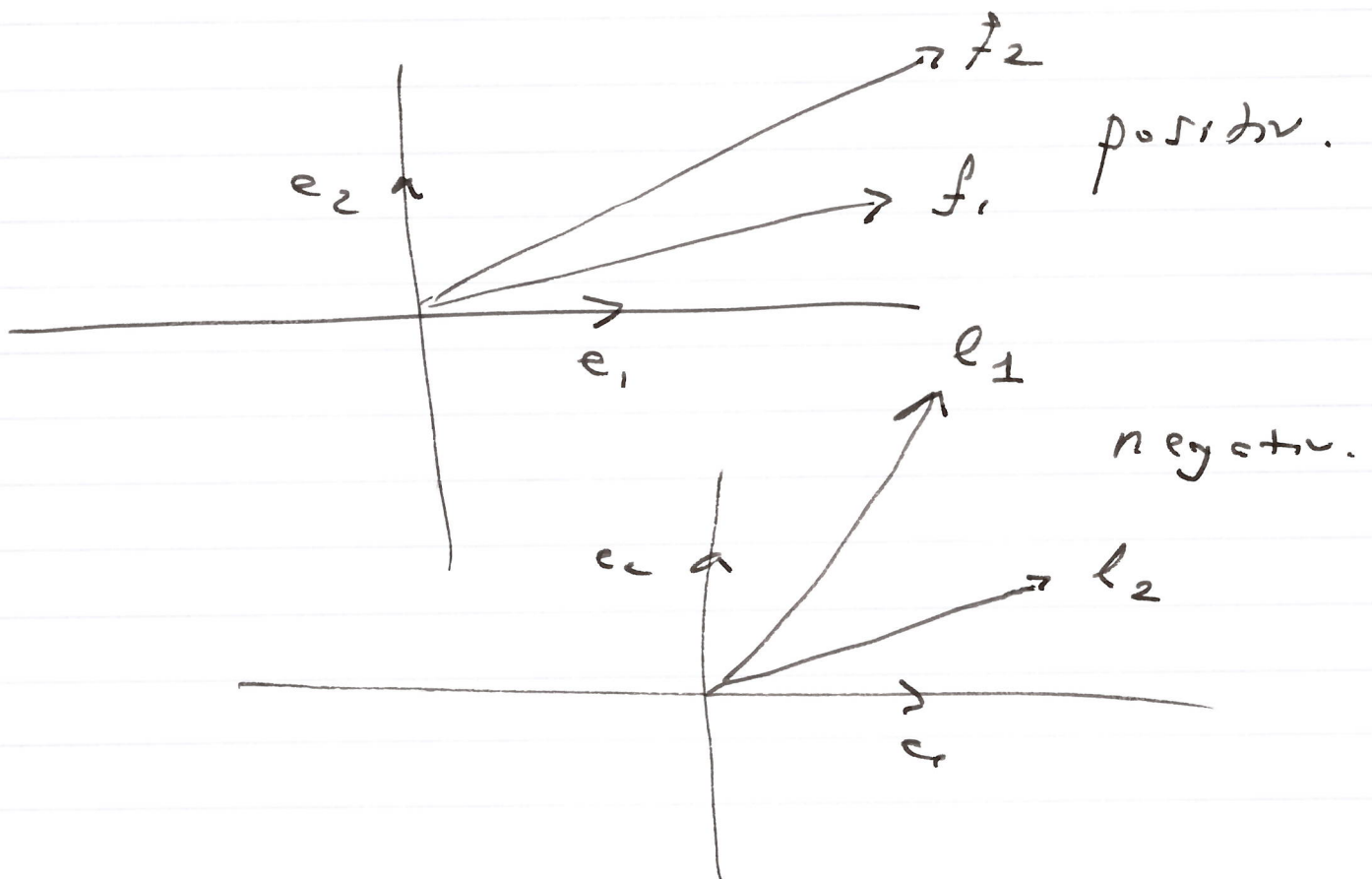
Orientierung: seien $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eine Basis (b_1, b_2) von $\mathbb{R}^2$ ist
positiv orientiert falls für die eindeutig
definierte Matrix $g \in GL(2, \mathbb{R})$ mit
 $g(e_1) = b_1$, $g(e_2) = b_2$ gilt:

$$\det(g) > 0.$$

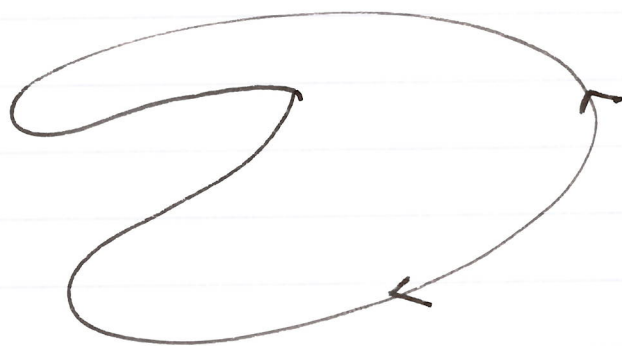
Sie ist negativ orientiert falls

$$\det(g) < 0.$$



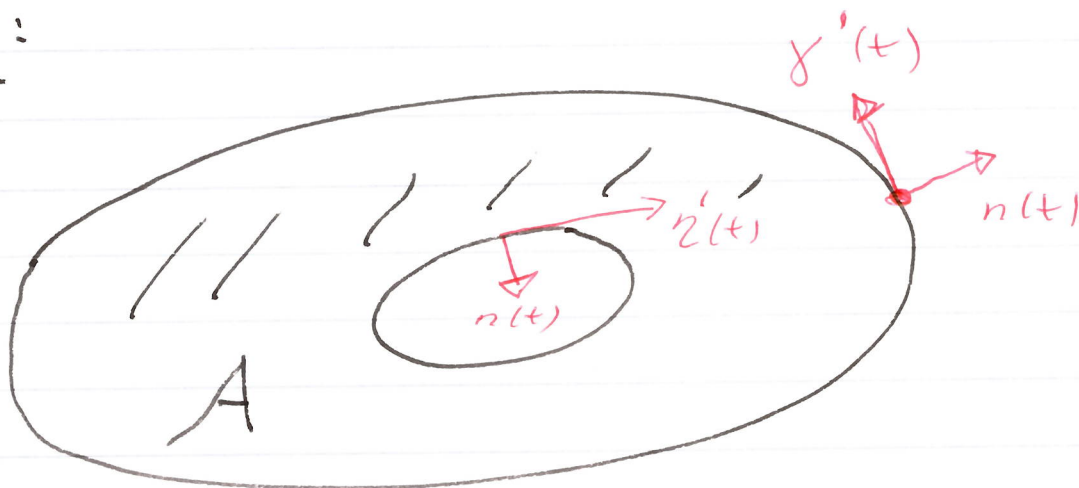
Def. 3.40 Ein reguläres Gebiet ist eine offene beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ deren Rand ∂A endliche Vereinigung von disjunkten Jordan Kurven ist. Jede dieser Kurven nennt sich Randkomponente von A .

Modulo orientierte Reparametrisierung (siehe Def. 3.7) kann eine Jordan Kurve auf zwei Arten parametrisiert werden: es gibt zwei Umlaufsinn.



Die positive Orientierung auf

∂A :



Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Jordan Kurve so dass $\gamma([a, b])$ eine Randkomponente von A bildet.

Dann hat γ bez. A positiven Umlaufsinn (oder ist rel. zu A positiv orientiert)

falls $(n(t), \gamma'(t))$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden, wobei $n(t)$

der Einheitsvektor bezeichnet der orthogonal zu $\gamma'(t)$ steht und

bz. A nach "außen" zeigt.

Theorem 3.41. (Satz von Green)

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ ein reguläres Gebiet

und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

ein C^1 -Vektorfeld, wobei

$$A \cup \partial A \subset U \subset \mathbb{R}^2, \\ \text{offen}$$

Dann gilt:

$$\int_{\partial A} F(s) ds = \iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) d(x,y)$$

- 207 -

Wobei

$$\int_{\partial A} F(\gamma) d\gamma = \sum_{i=1}^r \int_{\gamma_i} F(\gamma) d\gamma$$

und $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ die im positiven Umlaufsinne parametrisierten Randkomponenten von A bezeichnen.

Anwendung 3.42. (Flächeninhalt)

$$\text{Sei } F(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\text{dann ist } \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 \quad \forall (x, y)$$

und folglich:

$$Fl(A) = \iint_A 1 d(x, y) = \int_{\partial A} F(\gamma) d\gamma.$$

Falls z. B. A von einer Jordan

$$\text{Kurve } \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

berandet wird dann ist

$$\int \gamma(t) \cdot \gamma'(t)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} y(t) \\ \frac{1}{2} x(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left(x(t) y'(t) - y(t) x'(t) \right)$$

$$\text{Also: } \oint (A) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t) y'(t) - y(t) x'(t)) dt.$$

- 208 bss -

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t$$

$t \in [0, 2\pi]$. Dann ist

$$\text{Fl}(A) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{a \cos t \cdot b \cos t + a \sin t b \sin t\} dt$$

$$= \pi \cdot a \cdot b$$

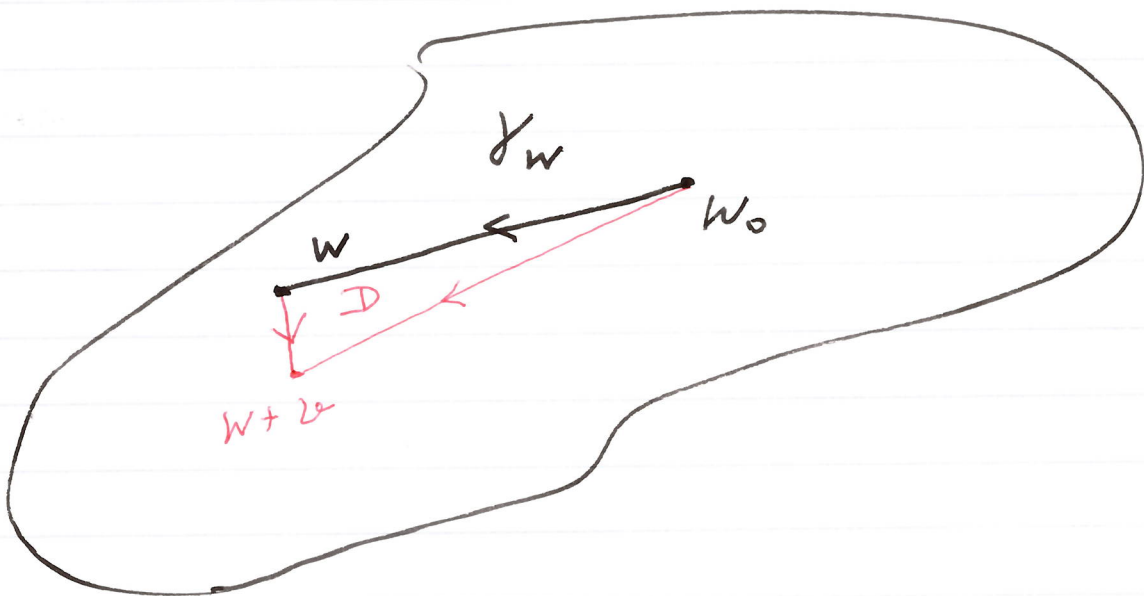
Anwendung 3.43 : (Thm 3.24 in $\mathbb{R}^2$)

Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ offen sternförmig
bezüglich $w_0 \in X$ und

$$F: X \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

ein C^1 Vektorfeld mit $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$ in X .

Dann gilt es $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -
-Funktion mit $\nabla g = F$.



Definiere
$$g(w) = \int_{\gamma_w} F(z) dz$$

wobei
$$\begin{aligned} \gamma_w : [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto (1-t)w_0 + tw \end{aligned}$$

Wir argumentieren wie im Satz 3.15.

Sei $\varepsilon > 0$ so dass $\forall v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\| < \varepsilon$

folgt $w+v \in X$. Dann ist der

Weg
$$\begin{aligned} c_w : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (1-t)w + t(w+v) \end{aligned}$$

ganz in X enthalten. Weil X sternförmig

ist, ist dann der Dreieck D (siehe

Seite 209) ganz in X enthalten.

Aus dem Satz von Green folgt:

- 211 -

$$0 = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) d(x, y)$$

$$= \int_{\partial D} F(s) ds$$

$$= \left(\int_{C_2} - \int_{\gamma_{w+u}} + \int_{\gamma_w} \right) F(s) ds$$

Also:

$$g(w+u) = g(w) + \int_{C_u} F(s) ds$$

$$= g(w) + \int_0^1 F(w+tu) \cdot u dt$$

$$= g(w) + F(w) \cdot u + R(w, u)$$

$$\text{where } R(w, u) = \int_0^1 [F(w+tu) - F(w)] u dt.$$

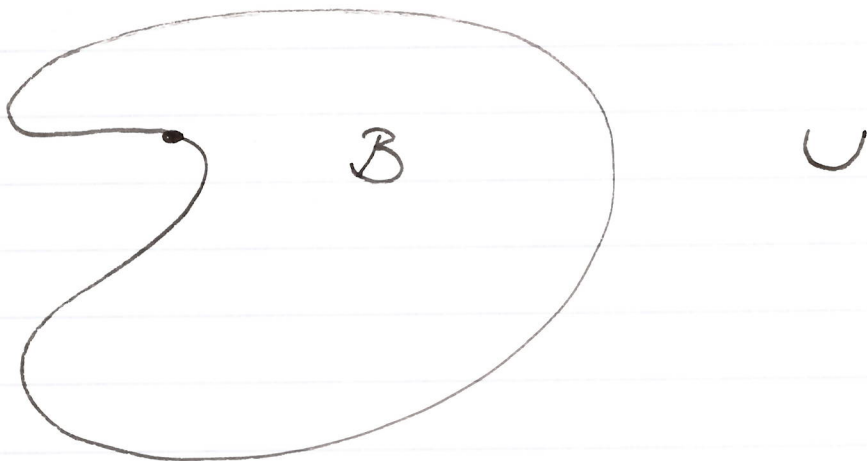
Aus Stetigkeit von F folgt:

$$\lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ v \neq 0}} \frac{\|R(w, v)\|}{\|v\|} = 0$$

Folglich ist g in X differenzierbar
und $\nabla g(w) = F(w)$. □

Anwendung 3.44. (Umlaufzahl)

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Jordan Kurve.



Dann (Jordan Kurvenatz) ist

$$\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a,b]) = B \cup U$$

wobei B, U offen, wegzusammenhängend
(Def. 3.16 (i)) und B beschränkt.

Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a,b])$.

Und $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \\ \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \end{pmatrix}$$

glattes Vektorfeld. (Vergl. Beispiel 3.26)

Sei

$$W(\gamma, (x_0, y_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} F(s) ds$$

Dann :

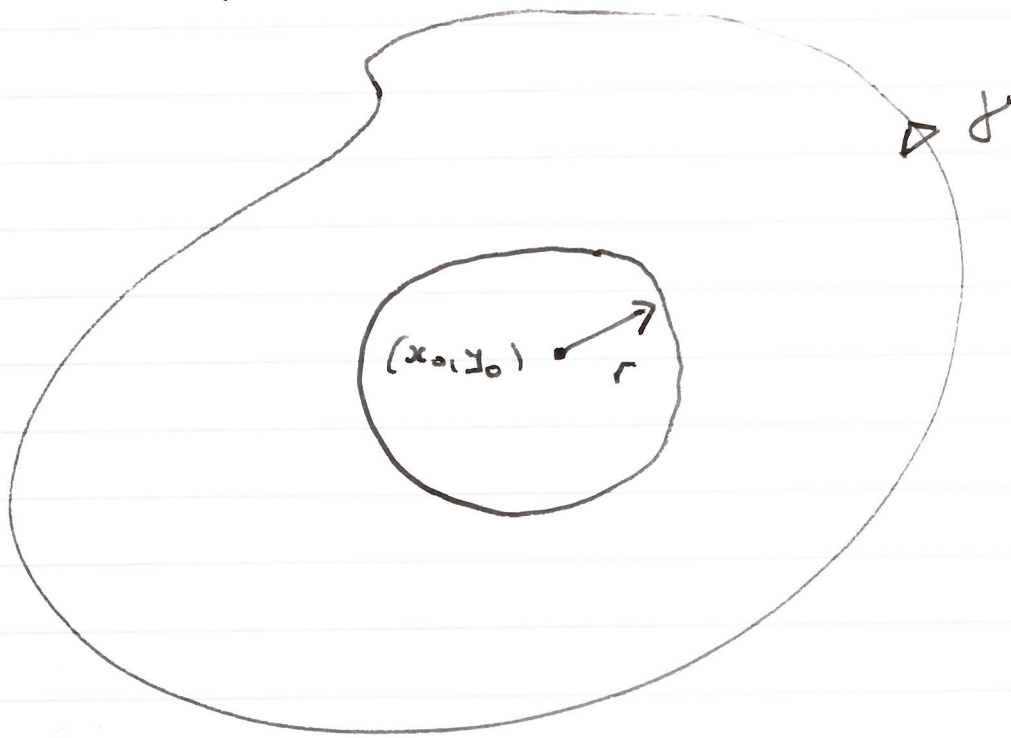
$$W(\gamma, (x_0, y_0)) = \begin{cases} +1 & \text{falls } (x_0, y_0) \in B \text{ und} \\ & \gamma \text{ bez. } B \text{ posit. Umlaufs.} \\ -1 & \text{falls } (x_0, y_0) \in B \text{ und} \\ & \gamma \text{ bez. } B \text{ neg. Umlaufs.} \\ 0 & \text{falls } (x_0, y_0) \in U. \end{cases}$$

$$\text{Sei } F(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

Dann gilt auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Sei nun $(x_0, y_0) \in B$ und γ
 bz. B positiven Umlaufssinn.



Sei $r > 0$ so dass die Kreisscheibe:

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq r \}$$

ganz in B enthalten ist.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) \end{aligned}$$

Dann folgt aus Green:

$$0 = \iint_{B \setminus D} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) d(\mu_g)$$

$$= \int_{\gamma} F_1 ds - \int_{\gamma} F_2 ds.$$

Nun können wir $\int F_1 ds$ explizit
?

berechnen:

$$F(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin t}{r} \\ \frac{\cos t}{r} \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix}$$

- 217 -

$$\int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} |\sin^2 t + \cos^2 t| dt = 2\pi.$$

Also f.o.t. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta = 1.$