Führt uns zum Ansatz:

$$\boxed{f(x) = z \exp(-A(x))}$$

Kettenregel $\Rightarrow$

$$f'(x) = z \exp(-A(x))\,(-A'(x))$$
$$= -a(x)\, f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) + a(x) f(x) = 0.$$

(Ko. Prop. 2.3.1)

<u>Satz 1.8.</u> Die Lösungen der DGL

$$y' + ay = 0$$

sind der Form $f(x) = z \exp(-A(x))$

wobei $z \in \mathbb{C}$, A Stammfunktion von a.

Die Lösung f für welche $f(x_0) = y_0$

gilt ist $\quad f(x) = y_0 \exp(A(x) - A(x_0))$.

Beweis: Sei f Lösung von $y' + ay = 0$

definiere: $g(x) = f(x) \exp(A(x))$.

Dann folgt:

$$g'(x) = f'(x) \exp(A(x)) + f(x) \exp(A(x)) a(x)$$
$$= \underbrace{\left(f'(x) + f(x) a(x)\right)}_{= 0} \exp(A(x))$$

woraus folgt: g ist konstant. $\boxed{}$

Inhomogene Gleichung:

$$y' + a \cdot y = b \qquad (\mathrm{I})$$

wobei $a, b \in C(I, \mathbb{C})$ und

$I \subset \mathbb{R}$
offenes Intervall.

Kennen alle Lösungen von

$$y' + a \cdot y = 0 \qquad (\mathrm{H}) \ (\text{Satz } 1.8)$$

Und suchen eine spezifische Lösung f von (I), denn:

$\mathcal{L}_b$ = Menge der Lösungen von (I)
$\mathcal{L}$ = 〃 〃 〃 von (H):

$$\boxed{\mathcal{L}_b = f + \mathcal{L} = \{ f + g : g \in \mathcal{L} \}.}$$

(Thm 1.6. (2))

Und: $\mathcal{L} = \{ z \exp(-A) : z \in \mathbb{C} \}$

und A ist eine Stammfunktion von a.

Zu (I) machen wir den Ansatz:

$$f(x) = z(x) \exp(-A(x))$$

"Variation der Konstanten"

Dann folgt:

$$b(x) = f'(x) + a(x) f(x)$$

$$= z'(x) \exp(-A(x)) - z(x) a(x) \exp(-A(x))$$

$$+ a(x) z(x) \exp(-A(x))$$

$$= z'(x) \exp(-A(x)).$$

Also: $z'(x) = \exp(A(x)) b(x)$

Sei $x_0 \in I$: dann ist,

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} \exp(A(t))\, b(t)\, dt$$

eine Lösung von $(*)$ und somit ist

$$f(x) = \exp(-A(x)) \int_{x_0}^{x} \exp(A(t))\, b(t)\, dt$$

$$\boxed{f(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right) \int_{x_0}^{x} b(t) \exp\left(\int_{x_0}^{t} a(u)\,du\right) dt}$$

Beispiel 1.9. (Direkter Ansatz in Spezialfällen).

$$\boxed{\text{Falls } a \in \mathbb{C},\ b \text{ Polynom so gibt es } f \text{ Polynom mit } f' + af = b \quad (\text{Übung})}$$

$f'(x) + af(x) = x^2 + x + 1$ mit $a \neq 0$.

Ansatz: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

$$f'(x) = 2a_2 x + a_1$$

$$f'(x) + af(x) = aa_2 x^2 + (2a_2 + aa_1)x + (a_1 + aa_0)$$

$$= x^2 + x + 1$$

$aa_2 = 1 \implies a_2$

$2a_2 + aa_1 = 1 \implies a_1$

$a_1 + aa_0 = 1 \implies a_0$.

1.4. Lineare D-Gleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Die homogene lineare D-Gleichung mit konstanten Koeffizienten der Ordnung $k \geq 1$ ist eine Gleichung:

$$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (H)$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$.

(Vergl. mit Def. 1.6)

Laut Thm 1.6 ist die Menge

$$S = \text{Lösungen von } H$$

ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim S = k$.

Ansatz: $f(x) = e^{\alpha x}$

und setzen es ein in (H):

$$e^{\alpha x}\left\{\alpha^k + a_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + a_0\right\} = 0$$

Folgerung: f ist genau dann Lösung von (H) falls α Nullstelle ist des charakteristischen Polynoms:

$$P(x) := x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0.$$

Beispiele 1.10.

(1) $y^{(3)} - 2y^{(2)} - 3y' = 0.$

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$$
$$= x(x+1)(x-3)$$

Nullstellen: $0, -1, 3$.

$$S = \{ z_1 + z_2 e^{-x} + z_3 e^{3x} : z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \}$$

hat dim. = 3 (Warum?)

(2) $y^{(3)} \equiv 0$, $P(X) = X^3$

Eine Nullstelle 0 liefert $e^0 = 1$ als Lösung. Wir wissen aber:

S = $\mathbb{C}$ - Vektorraum der Polynome mit grad ≤ 2.

Im (1) Fall erhalten wir laut Thm 1.6 alle Lösungen. Im (2) Fall nur 1.
Wo ist das Problem?

Fundamentalsatz der Algebra:

$$P(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)$$

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \mathbb{C}$

Beispiel 1.10 (i) ist Spezialfall:

<u>Satz 1.11</u>:

Falls das charakteristische Polynom P der D-GL

$$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

k <u>verschiedene</u> Nullstellen besitzt, so ist der Raum $\mathcal{S}$ der Lösungen

$$\mathcal{S} = \left\{ z_1 e^{\alpha_1 x} + \dots + z_k e^{\alpha_k x} : z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

"Mehrfache Nullstellen":

$\alpha \in \mathbb{C}$ ist l-fache Nullstelle von P falls:

$$\begin{cases} P(X) = (X-\alpha)^l Q(X) \\ Q(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Satz 1.12}} \text{ Falls } \alpha \ l\text{-fache Nullstelle von } P \text{ so sind die Funktionen} \\ \qquad e^{\alpha x}, \ x e^{\alpha x}, \ \ldots, \ x^{l-1} e^{\alpha x} \\ l \text{ linear unabhängige Lösungen von (H).} \end{array}}$$

In Beispiel 1.10 (2): $P(X) = X^3$

$\alpha = 0$, 3-fache Nullstelle

$\mathbb{1}, \ x, \ x^2$ Basis von $\mathcal{S}$.

Beispiel 1.11:

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y^{(2)} + y' - 2y = 0$$

char. Polynom:

$$P(x) = (x-2)(x^2+1)^2$$
$$= (x-2)(x+i)^2(x-i)^2$$

$$2 \longrightarrow e^{2x}$$
$$-i \longrightarrow e^{-ix}, \quad x e^{-ix}$$
$$i \longrightarrow e^{ix}, \quad x e^{ix}$$

$$S = \left\{ \zeta_1 e^{2x} + \zeta_2 e^{-ix} + \zeta_3 x e^{-ix} + \zeta_4 e^{ix} + \zeta_5 x e^{ix} \right\}$$

$\dim S = 5$.

Sei $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$: wir sind dann am Raum der Lösungen von $y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ in $C^\infty(\mathbb{R}, \underline{\underline{\mathbb{R}}})$ interessiert.

Sei $P(x)$ = Charakteristische Polynom.

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$ l-fache Nullstelle:

$$e^{\alpha x}, \; x e^{\alpha x}, \; \ldots, \; x^{l-1} e^{\alpha x}$$

linear unabhängige Lösungen in $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(2) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ℓ-fache Nullstelle.

$$\alpha = a + ib \qquad b \neq 0.$$

Dann:

$$\boxed{\begin{array}{ll} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ x e^{ax}\cos bx & x e^{ax}\sin bx \\ \text{— — — — —} & \text{— — — — —} \\ x^{\ell-1} e^{ax}\cos bx & x^{\ell-1} e^{ax}\sin bx \end{array}}$$

sind <u>2ℓ</u> linear unabhängige Lösungen in $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Erhält man durch geeignete $\mathbb{C}$-lineare Kombinationen von Lösungen in $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Anmerkung zu (2):

$$P(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_0$$

mit Koeff. in $\mathbb{R}$.

Falls $\alpha = a + ib$: $P(\alpha) = 0$

$$\Longrightarrow \quad P(\bar{\alpha}) = 0.$$

Allgemeiner: α l-fache Nullstelle

$\Longrightarrow$ $\bar{\alpha}$ l-fache Nullstelle.

Also

$$e^{\alpha x} \qquad e^{\bar{\alpha} x}$$

$$x\, e^{\alpha x} \qquad x\, e^{\bar{\alpha} x}$$

$$\vdots$$

$$x^{l-1} e^{\alpha x} \qquad x^{l-1} e^{\bar{\alpha} x}$$

Lösungen in $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Inhomogene D-Gl. mit Konstanten Koeffizienten.

$$y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \dots + a_0 y = b \quad (I)$$

wobei $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$ und

$$b \in C(I, \mathbb{C}).$$

"Variation der Konstanten"

$k = 2$:

Sei S = $\mathbb{C}$ - Vektorraum der Lösungen von

$$y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \quad (H)$$

$f_1, f_2 \in \mathcal{S}$ Basis.

Ansatz: $f(x) = z_1(x) f_1(x) + z_2(x) f_2(x)$

Falls wir f in (I) einsetzen gibt es 1 Gleichung mit 2 unbekannten Funktionen.

Zusätzlich: $z_1' f_1 + z_2' f_2 = 0$.

Dann:

$$f' = z_1 f_1' + z_2 f_2'$$

$$f'' = z_1' f_1' + z_2' f_2' + z_1 f_1'' + z_2 f_2''$$

$$f'' + a_1 f' + a_0 f = z_1' f_1' + z_2' f_2'$$

<u>Zu Lösen</u> :

$$\begin{cases} z_1' f_1 + z_2' f_2 = 0 \\ z_1' f_1' + z_2' f_2' = b \end{cases}$$

Setzen: $W(x) = f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x)$

$$\neq 0 \quad \forall x \qquad (?)$$

Lösungen dieses linearen Systems:

$$z_1' = -\frac{f_2 b}{W} \qquad z_2' = \frac{f_1 b}{W} .$$

Also

$$\boxed{f(x) = -f_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{f_2(t) b(t)}{W(t)} dt + f_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{f_1(t) b(t)}{W(t)} dt}$$