

Kapital 2 Differential Rechnung im $\mathbb{R}^n$

Einleitung 2.1.

Ziel: Differentialrechnung von $\mathbb{R}^m$ -
wertigen, auf Teilmengen von $\mathbb{R}^n$
definierten {Funktionen} zu entwickeln.
{Abbildungen}

Dabei sollte man folgende Beispiele
im Auge behalten:

Lineare Abbildungen, Quadratische Formen
Polynome.

Beispiele 2.1. ([K6] 3.1)

(2) Lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

gegeben durch $f(x) = Ax$ wobei

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenvektor

aufgefasst ist und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine $m \times n$ ~~Matrix~~ Matrix darstellt.

Allgemeiner: Affine Abbildungen.

$$g(x) = y_0 + f(x) \quad f \text{ linear}$$

(2) Quadratische Form : $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Funktion der Form

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$= {}^t x A x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$A = (a_{ij}).$$

Wichtige Beispiele:

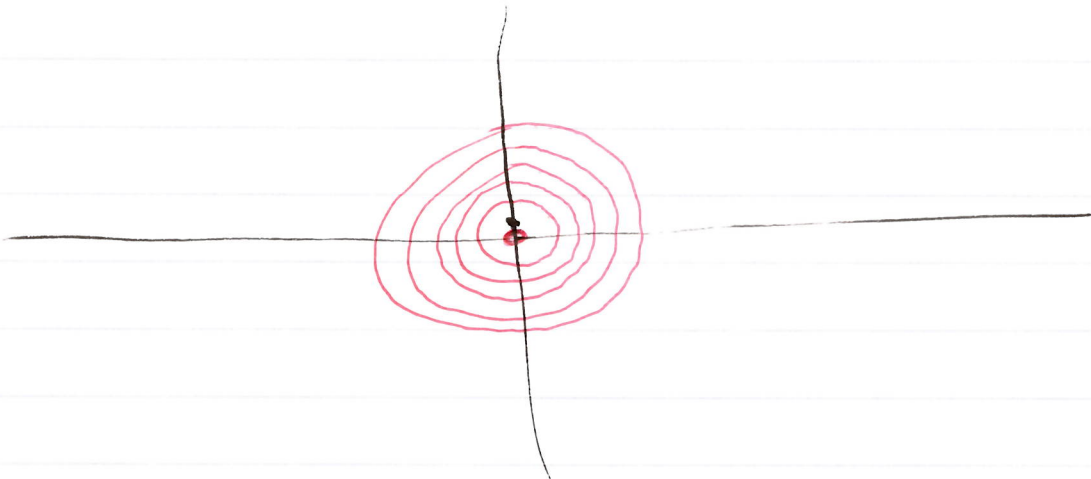
$$Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$$Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1 \cdot x_2.$$

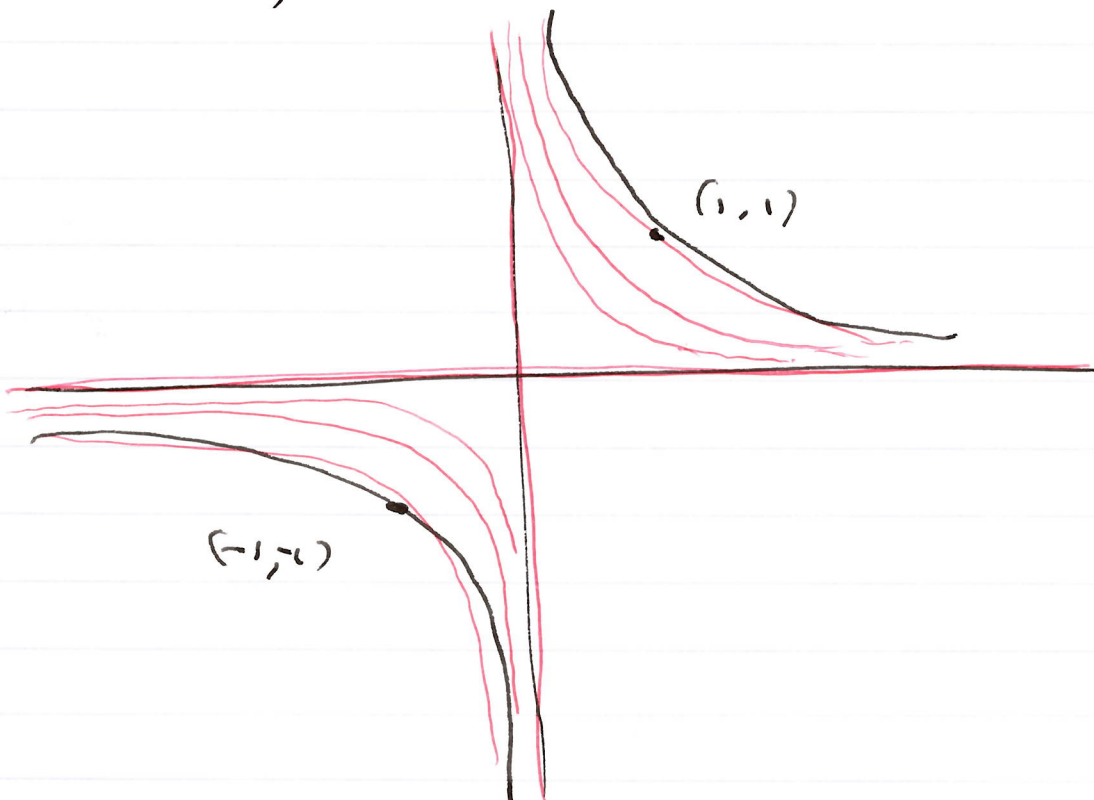
- 3655

Niveau linien:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$$



$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$$



(3) Polynom : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Ein Monom ist eine Funktion
der Form $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$$

Wobei $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$.

Ein Polynom : ist eine lineare Kombination von Monomen.

Operationen auf Funktionen :

Kartesisches Produkt, Separierte
Variablen, Verknüpfung

Operationen 2.2. ([K0] 3.1)

(4) Kartesisches Produkt:

Seien $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$, $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$

dann ist $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 + m_2}$

definiert durch

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

das Kartesische Produkt der
Funktionen f_1, f_2 .

Bemerkung: Jede Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ist das Kartesische Produkt von

m Funktionen $f_1, \dots, f_m$. Nämlich

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

(5) Separierte Variablen :

Falls $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

dann können wir definieren,

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_1(x_1) \dots f_n(x_n).$$

Beispiel: Monome.

(6) Verknüpfung :

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\text{dann:} \quad g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p.$$

Beispiel: Einschränkung als Verknüpfung.

- 7 -

Sei $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir lassen

$x_1 \in \mathbb{R}$ fest und betrachten:

$$\mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

d.h. Einschränkung von f auf
 $\{x_1\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Kann man als Verknüpfung sehen:

$$\mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

2.2. Stetigkeit in $\mathbb{R}^n$. ([K0] 3.2)

Grenzwerte ? Stetigkeit ?

Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann erfüllt

die Norm (oder Länge) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

folgende Eigenschaften:

(1) $\|x\| \geq 0$ mit Gleichheit genau
dann wenn $x = 0$

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Δ -Ungl.)

- 9 -

Wobei (3) aus

(4) (Cauchy-Schwarz)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{folgt.}$$

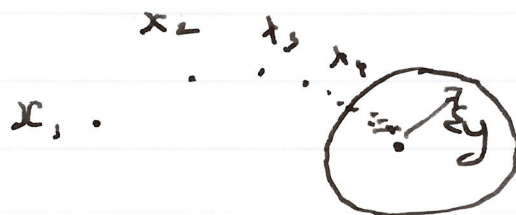
Analog zu Analysis I Def. 2.6.1
definieren wir:

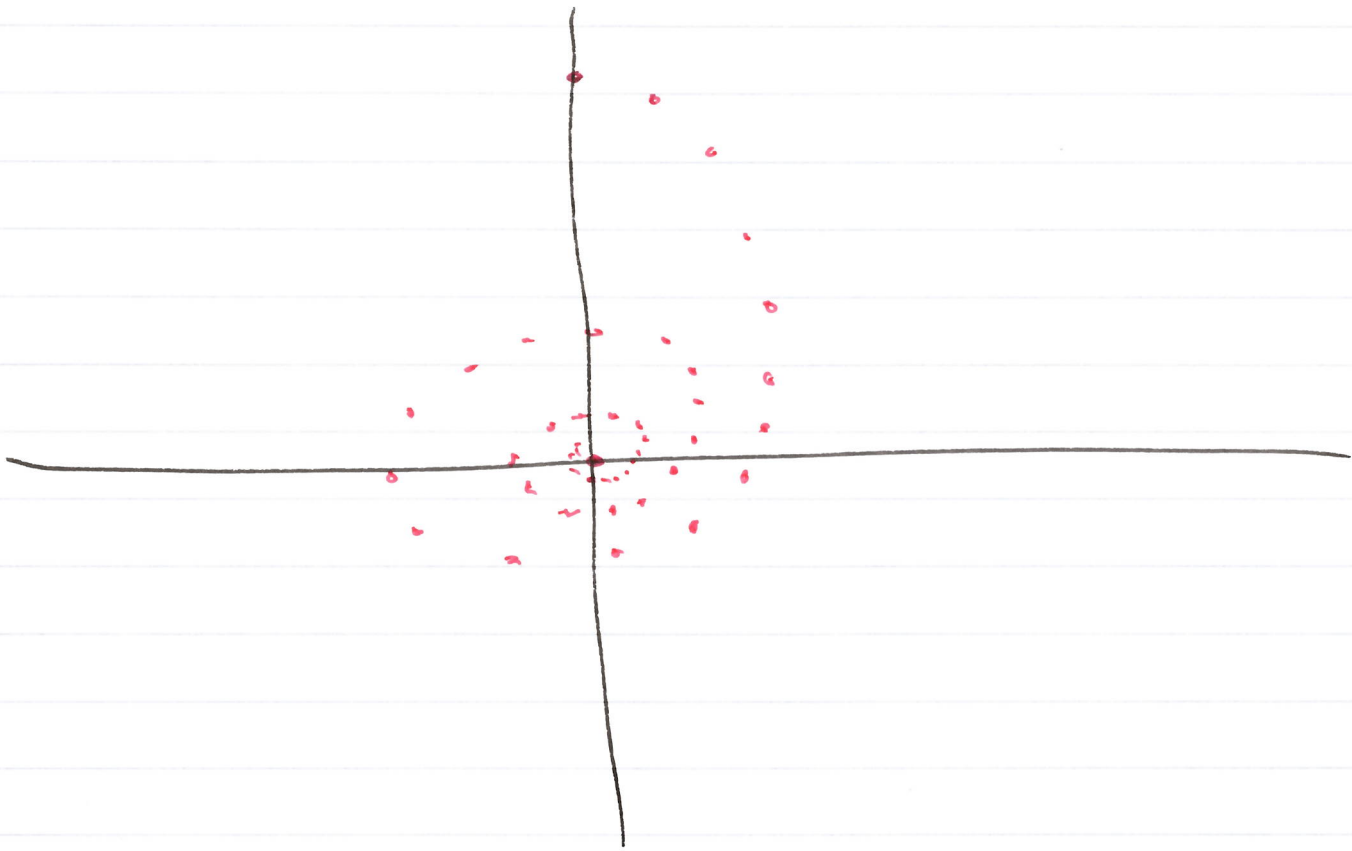
Definition 2.3 ([K0] Def. 3.2.1)

Eine Folge $(x_k)_{k \geq 1}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert
mit Grenzwert $y \in \mathbb{R}^n$ falls:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$ mit

$$\|x_k - y\| < \varepsilon \quad \forall k \geq N.$$





Für Def. 2.3 guttaft schreiben wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y.$$

Bemerkung 2.4 (Siehe Kow. Lemma 3.2.2)

Seien $x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n})$

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

Dann: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y$

$$\iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,j} = y_j.$$

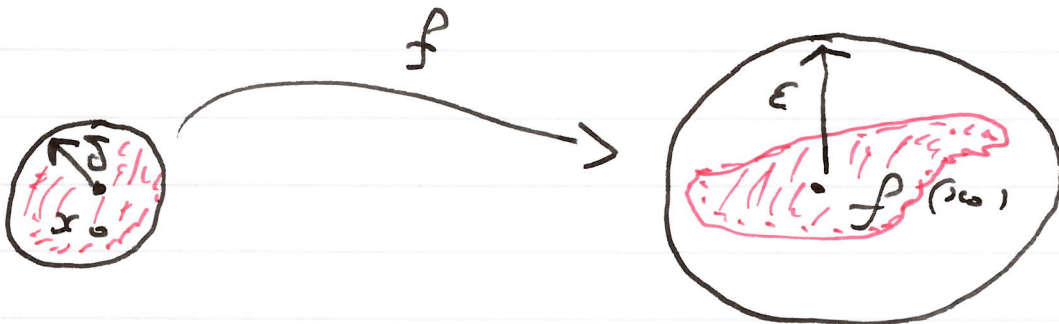
Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$

Def. 2.5 (Kor Def. 3.2.3)

(i) $x_0 \in X$: f ist stetig in x_0

folgt $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ so dass

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$



(2) f ist in X stetig, falls f in jedem $x_0 \in X$ stetig ist.

Analog zu Analysis I, Satz 3.2.4
haben wir ein Kriterium für Stetigkeit, dass auf Folgen basiert.

Prop. 2.6 (Ko Prop. 3.2.4)

$f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist in $x_0 \in X$ genau dann stetig falls für jede konvergente Folge $(x_k)_{k \geq 1}$ in X mit Grenzwert x_0 gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0).$$

Analog zum Fall von $\mathbb{R}$ definieren wir den Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$$

einer Funktion wie folgt:

([K0] Def. 3.2.5)

Definition 2.7 Sei $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$

und $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wir sagen,

dass " f den Grenzwert $y \in \mathbb{R}^m$ hat für $x \rightarrow x_0$ "

falls die Funktion $F: X \rightarrow \mathbb{R}^m$

definiert durch

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \setminus \{x_0\} \\ y & x = x_0 \end{cases}$$

in x_0 stetig ist.

- 13 bis -

Beispiel: $f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$

dann gilt $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} f(z) = 0$.

Folgendes ist dann relativ klar
aus Prop 2.6 :

Prop 2.8. (Kor Prop 3.2.7)

$$\text{Es gilt } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = y$$

genau dann wenn für jede Folge

$(x_k)_{k \geq 1}$ in $X \setminus \{x_0\}$ mit Grenzwert

$$x_0 \text{ folgt } \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y.$$

Beispiel 2.9 $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist dann

$$\text{stetig in } x_0 \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Kontinuität wird g mittels Verknüpfung
gezeigt:

Prop. 2.10 (K. Prop. 3.2.3)

Seien $f: X \rightarrow Y$

$$\begin{array}{cc} \cap & \cap \\ \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$$g: Y \rightarrow \mathbb{R}^p$$

stetig. Dann ist $g \circ f$ stetig.

Beweis: Wende Prop. 2.6 zweimal an.



Beispiele 2.11. ([K-] Example 3.2.10)

(1) Der Kartesische Produkt von stetigen Abbildungen ist stetig. (Vogl. 2.2 (4))

(2) Lineare Abbildungen sind stetig:

$$\text{Sei } f(x) = A \cdot x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Fall 1} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

wobei A_i = Zeilenvektoren dann:

$$f(x) = \begin{pmatrix} \langle A_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle A_m, x \rangle \end{pmatrix}$$

Woraus folgt.

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m |\langle A_i, x \rangle|^2$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^m \|A_i\|^2 \right) \|x\|^2$$

C.S.

d.h.

$$\|A \cdot x\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \|A_i\|^2} \cdot \|x\|.$$

Woraus Kontinuität folgt.

(3) (Separierte Variablen)

Falls $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

dann folgt

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

stetig.

-18-

(4) Polynome sind stetig.

(5) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist
für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x, y_0) \end{aligned}$$

stetig.



Die Umkehrung gilt nicht im
allgemeinen.

$$f(x, y) = \begin{cases} x & y \geq 0 \\ -x & y < 0. \end{cases}$$

$$-19- \quad k \geq 1;$$

$$\text{Dann ist } f(1, -1/k) = -1$$

$$f(1, 0) = 1$$

$$\text{und } \lim_{k \rightarrow \infty} (1, -1/k) = (1, 0).$$

Natürliche Definitionen betrachte in $\mathbb{R}^2$
sind vielfältiger wie in $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$
hatten wir es meistens mit Intervalle
zu tun. Intervalle sind genau die
konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}$; schon
konvexe Teilmengen in $\mathbb{R}^2$ haben
keine "einfache" Beschreibung.

Für die Zwecke der Analysis
brauchen wir Verallgemeinerungen

— (9 bis — .

Konvexe : in $\mathbb{R}^n \supset K$ konvex

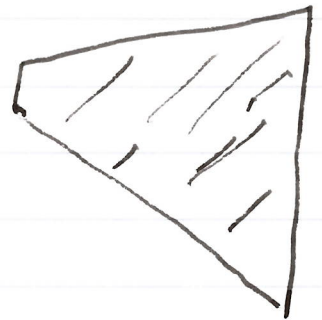
falls $\forall x, y \in K \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in K$

$\lambda \in [0, 1]$



in $\mathbb{R}$: Intervalle.

in $\mathbb{R}^2$:



Einfach Zusammenh.

