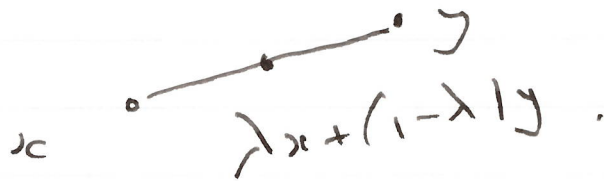


— (9 bis — .

Konvexe : in  $\mathbb{R}^n \supset K$  konvex

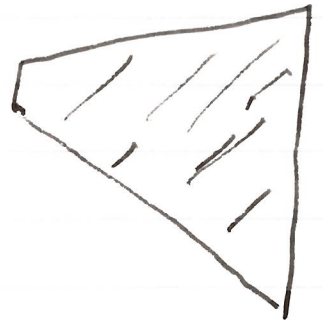
falls  $\forall x, y \in K \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in K$

$\lambda \in [0, 1]$

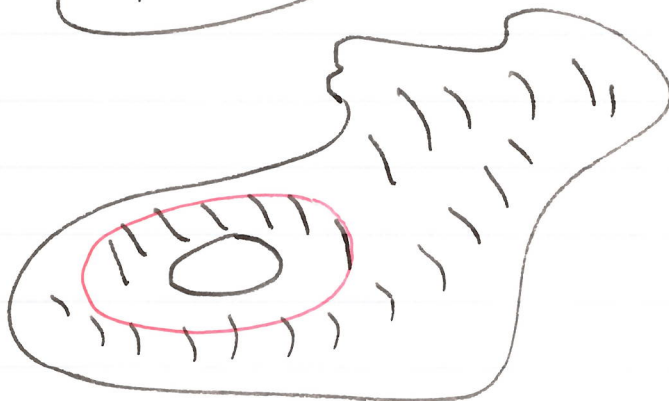


in  $\mathbb{R}$  : Intervalle.

in  $\mathbb{R}^2$  :



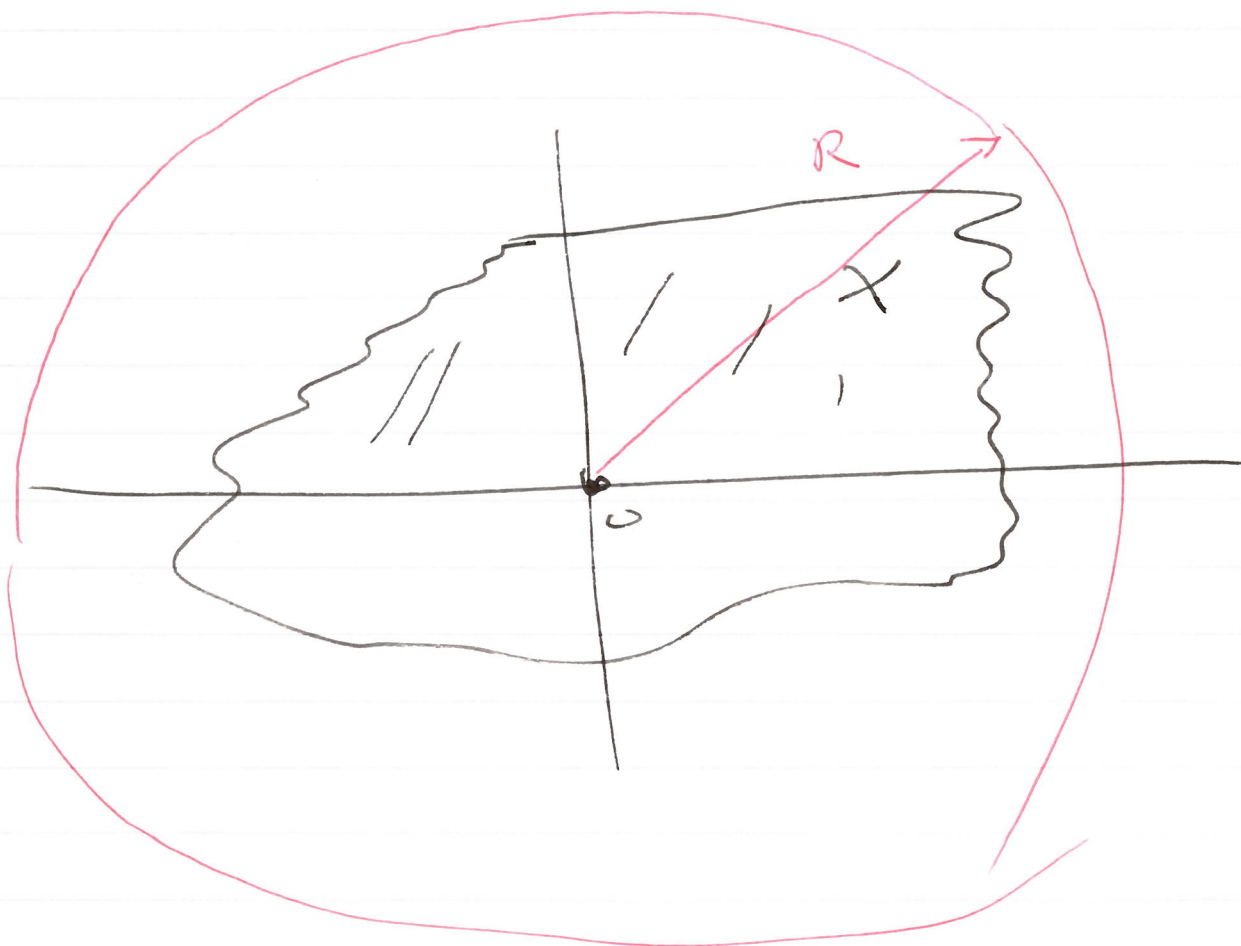
Einfach Zusammenh.



der Begriffe des abgeschlossenen,  
bes. kompakten Intervalls.

Def. 2.12 (Ko: Def 3.2.11)

(1) Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^n$   
ist beschränkt falls  $\exists R \geq 0$   
gibt mit  $\|x\| \leq R \quad \forall x \in X$

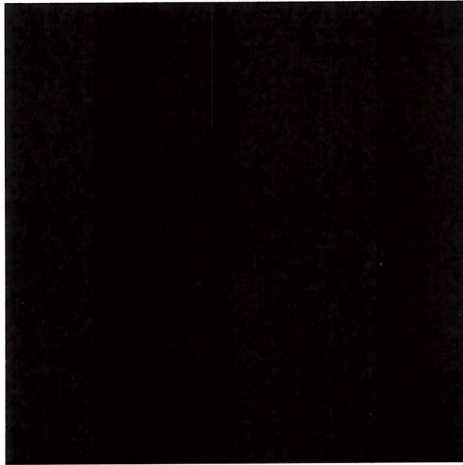


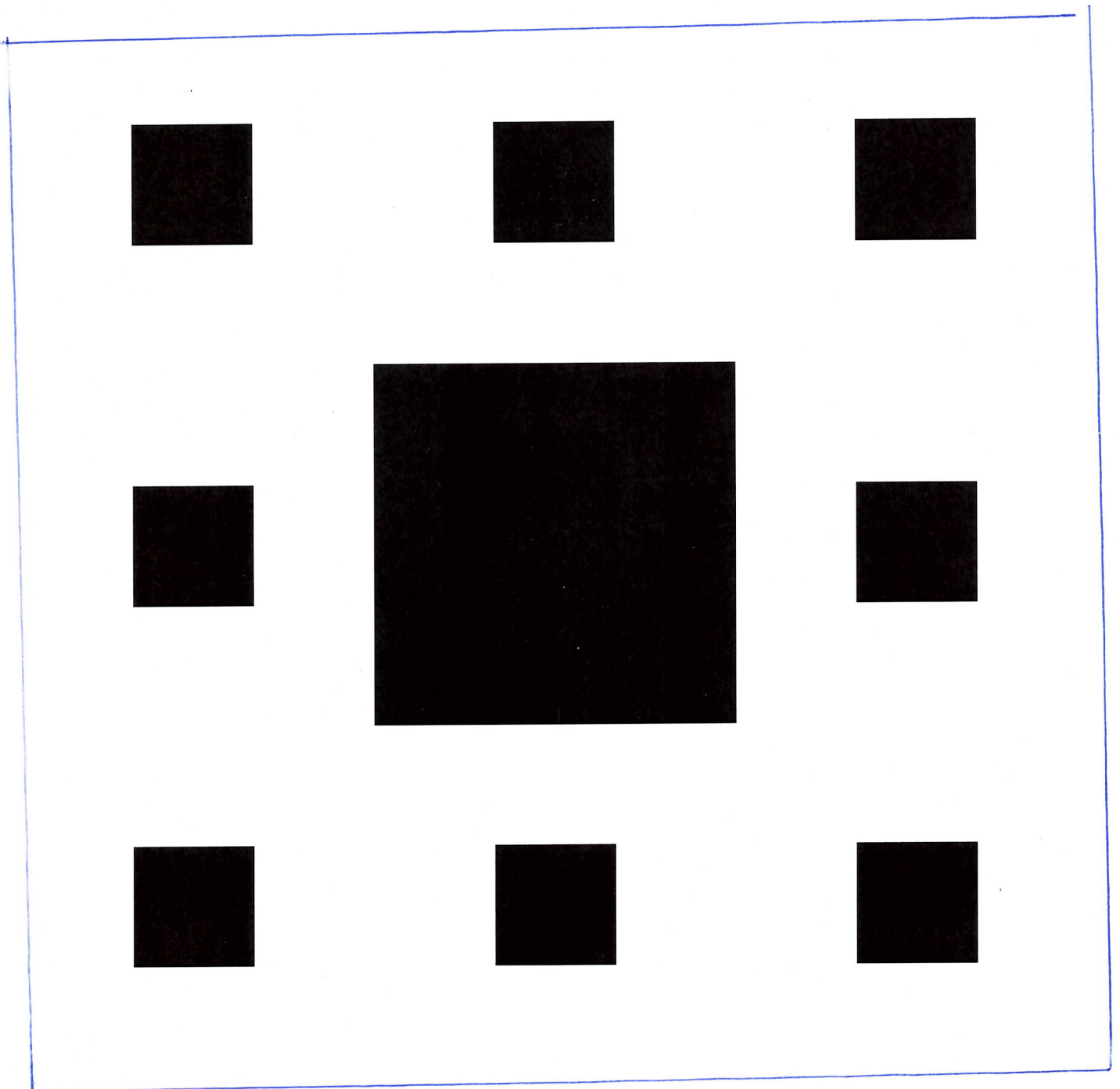
(2) Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen falls  $X$  die Grenzwerte seiner konvergenten Folgen enthält.

(3) Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^n$  ist kompakt falls sie beschränkt und abgeschlossen ist.

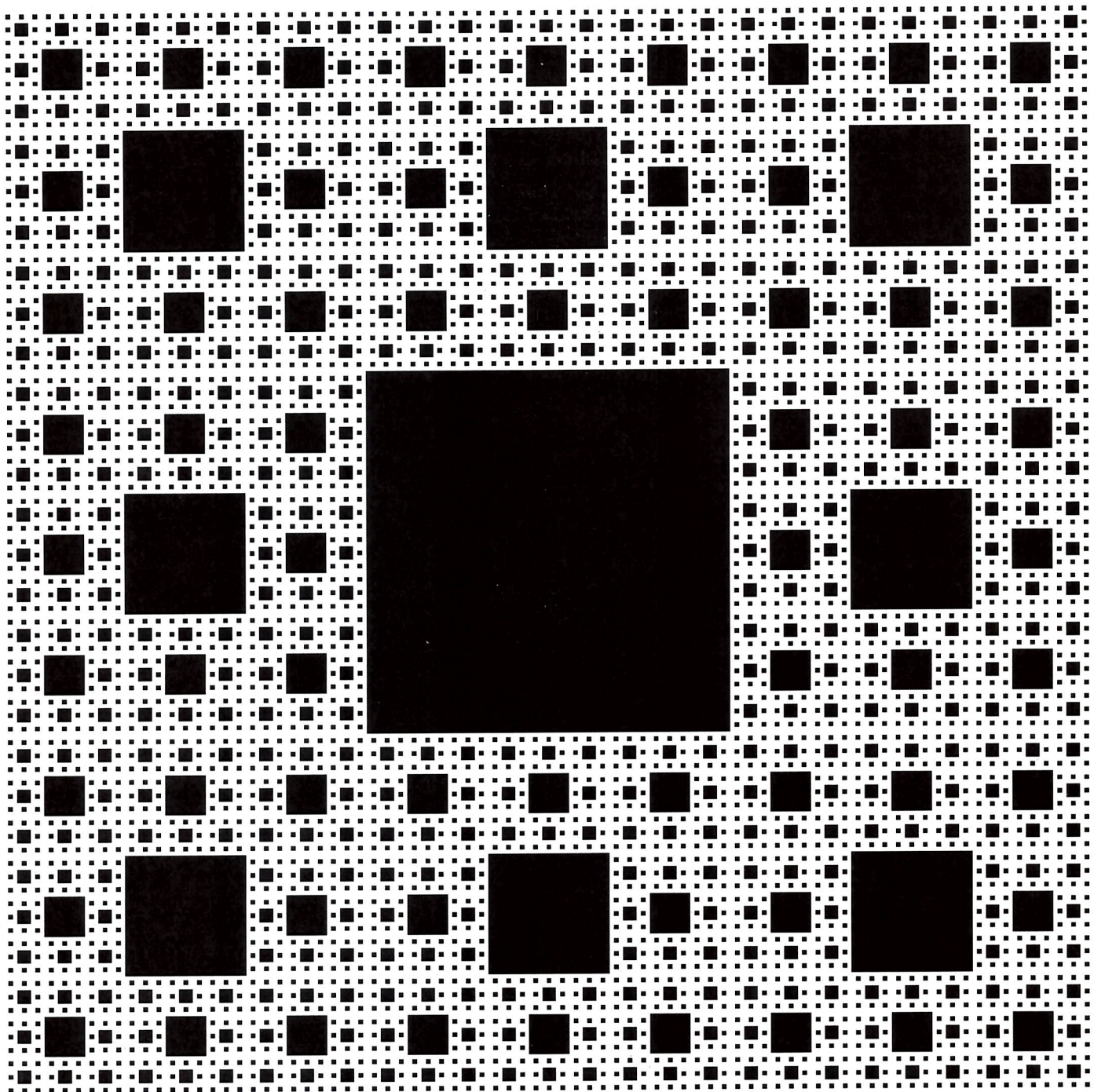
### Beispiele 2.13

(1)  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}^n$  sind abgeschlossen.  
 $\emptyset$  ist beschränkt,  $\mathbb{R}^n$  ist nicht beschränkt.



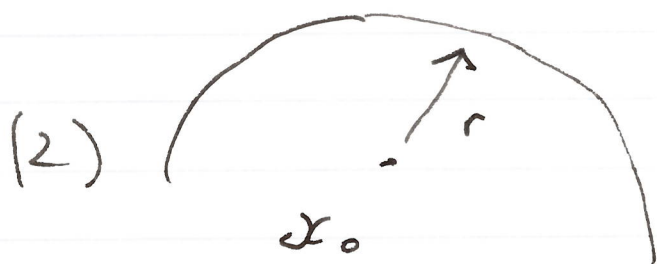






dimension  $\frac{\log 8}{\log 3} = 1.8928 \dots$

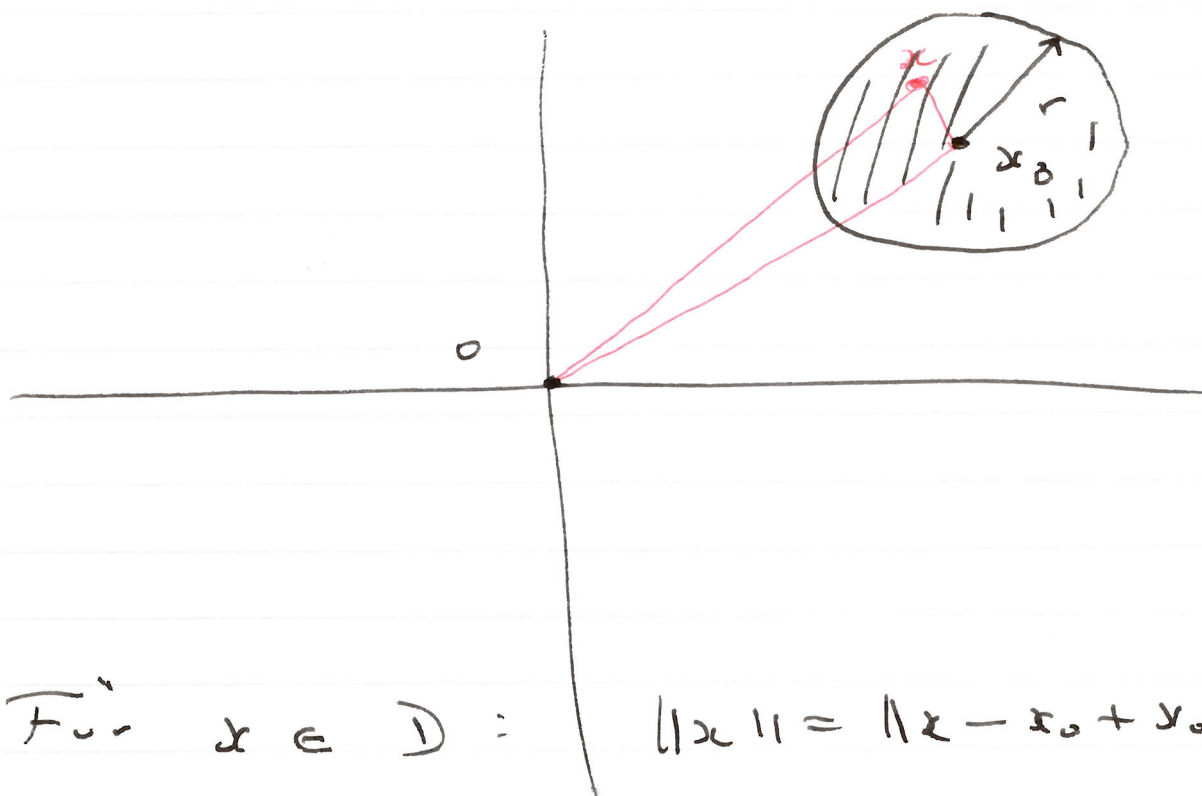
- 22 -



$$r > 0.$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r \right\}$$

Ist beschränkt :



$$\text{Für } x \in D : \quad \|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \\ \leq \underline{r + \|x_0\|}$$

$D$  ist nicht abgeschlossen:

$$x_k := x_0 + r\left(1 - \frac{1}{k}\right)e_1 \quad k \geq 1$$

$$\longrightarrow x_0 + re_1.$$

$$(3) \quad \Delta := \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r \}$$

ist abgeschlossen.

Mit dem Begriff der abgeschlossenen Menge kann man eine Mengentheoretische Charakterisierung der Stetigkeit herleiten:

Prop. 2.14. ([Ko] Prop. 3.2.12)

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann stetig falls das Urbild jeder abgeschlossenen Menge, abgeschlossen ist.



Beispiel 2.15  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

stetig, dann ist

$$Z(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

abgeschlossen. Warum?

Gewisse fundamentale Sätze aus der Analysis I lassen sich leicht verallgemeinern, z. B.:

Satz 2.16 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$  hat eine konvergente Teilfolge.

und:

Thm 2.17 MinMax ([K.] Thm 5.2.15)

Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X \neq \emptyset$  kompakt

und  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann

ist  $f$  beschränkt und es gibt

$x_+ \in X$  und  $x_- \in X$  mit

$$f(x_+) = \sup_{x \in X} f(x)$$

$$f(x_-) = \inf_{x \in X} f(x).$$

Anderer, wie der Zwischenwertsatz

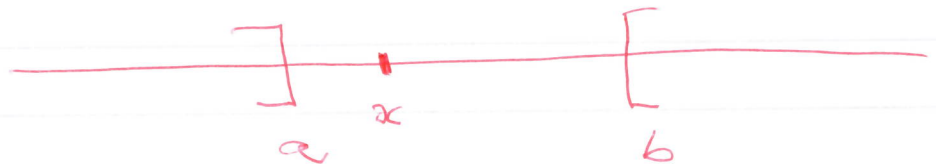
lassen sich nicht so einfach verallgemeinern.

Z.B. "Das Käse-Sandwich Theorem".

## 2.3. Partielle Ableitungen.

In  $\mathbb{R}$  hatten wir den Begriff der differenzierbaren Funktion erklärt für Funktionen die auf einem offenen Intervall definiert sind.

Warum?

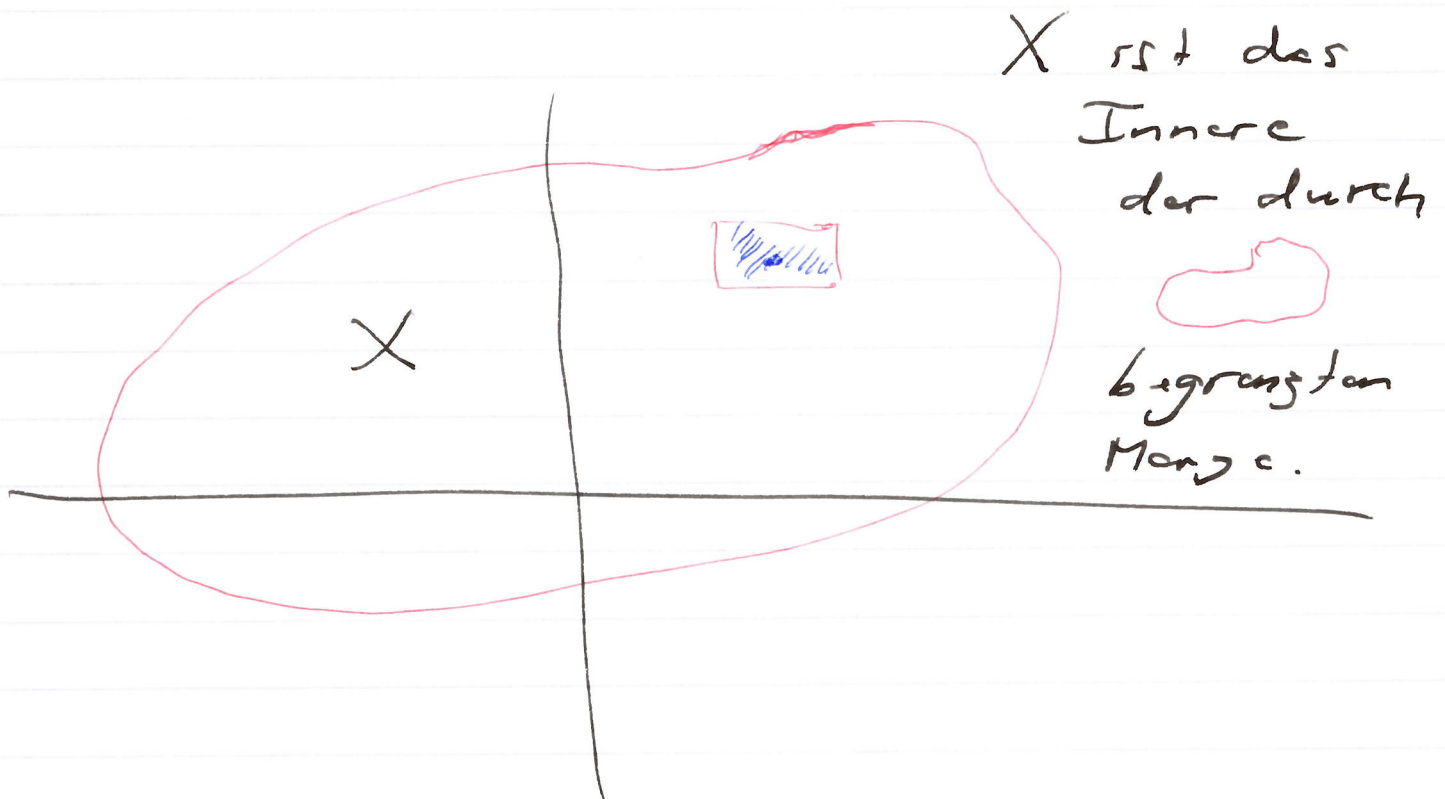


Def. 2.18 ([Ko] Def. 3.3.1) Eine Teilmenge

$X \subset \mathbb{R}^n$  ist offen falls  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X$

$\exists \delta > 0$  mit

$$]x_1 - \delta, x_1 + \delta[ \times \dots \times ]x_n - \delta, x_n + \delta[ \subset X$$



Es gibt einen einfachen Zusammenhang zwischen offenen und abgeschlossenen Teilmengen:

Satz 2.19 ([K.] Prop. 3.3.2)

Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann offen falls ihr Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus X$  abgeschlossen ist.

Daraus folgt:

Korollar 2.20 ([Kö] Cor. 3.3.3)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann stetig  
falls das Urbild jeder offenen  
Teilmenge offen ist.

Beispiele 2.21

(1)  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  ist eine offene  
Teilmenge.

(2)  $\emptyset, \mathbb{R}^n$  sind zugleich offen und  
abgeschlossen.

(3)  $D = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x - x_0\| < r\}$   
ist offen. Warum?



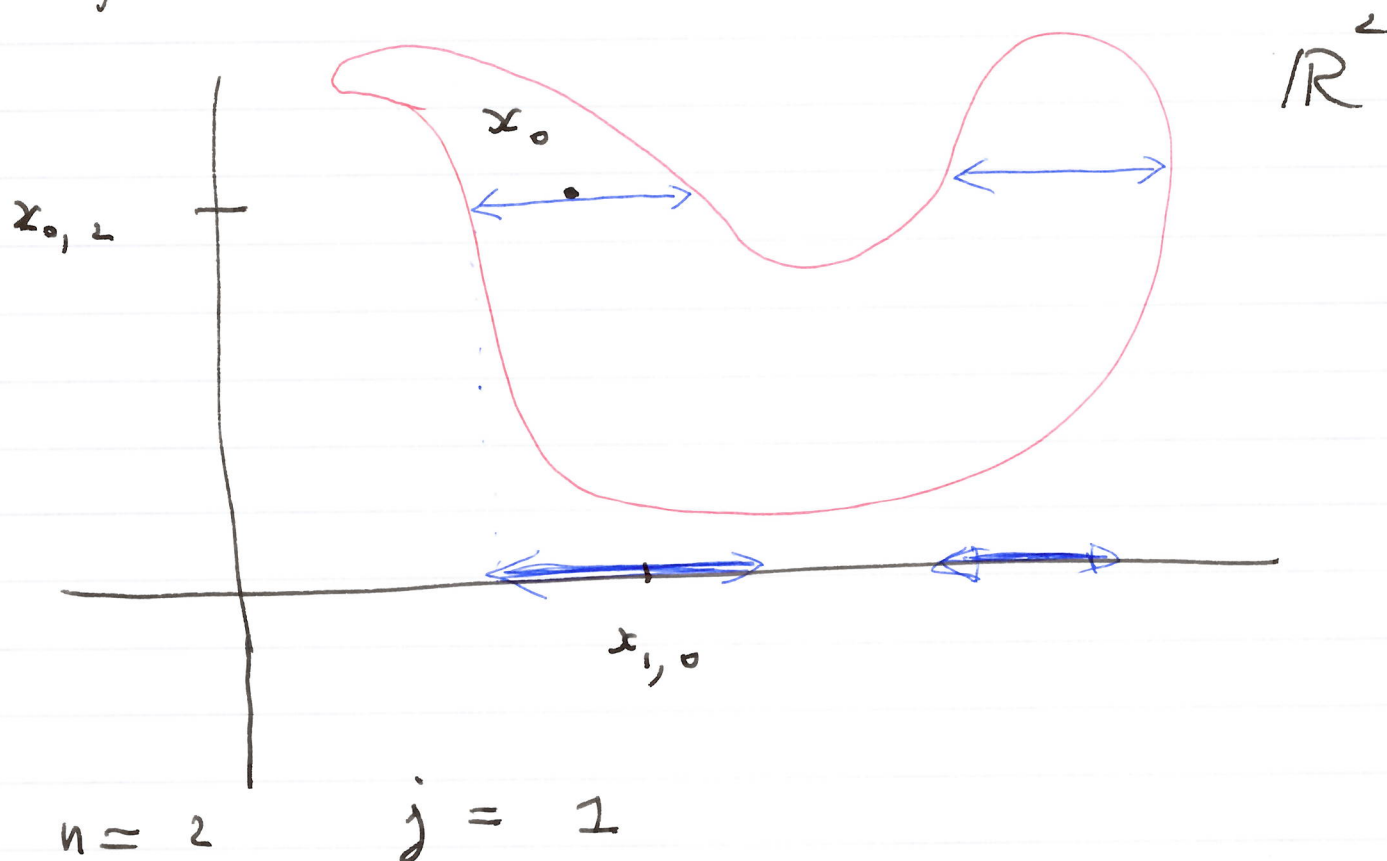
(4) Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  offen und

$$x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in X.$$

Sei  $1 \leq j \leq n$ . Dann ist

$$I = \left\{ t \in \mathbb{R} : (x_{0,1}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Position } j}}{t}, \dots, x_{0,n}) \in X \right\}$$

offen in  $\mathbb{R}$ .



$$I = \left\{ t \in \mathbb{R} : (t, x_{0,2}) \in X \right\}$$

Def. 2.22 Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X$  offen

und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.

Dann ist  $f$  bezüglich der  $j$ -ten Variablen  
in  $X$  partiell differenzierbar falls  $\forall x_0 \in X$   
die Funktion

$$g(t) := f(x_{0,1}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{t}, \dots, x_{0,n})$$

als Funktion von  $t$  in

$$I = \{ t \in \mathbb{R} : (x_{0,1}, \dots, t, \dots, x_{0,n}) \in X \}$$

differenzierbar ist.

In diesem Fall wird die Ableitung  
in  $t = x_{0,j}$  mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \text{ oder } \partial_j f(x_0) \text{ oder } \frac{\partial f}{x_j}(x_0)$$

bezeichnet, und nennt sich partielle

Ableitung nach  $x_j$ .

Nach der Definition der Ableitung haben wir also:

$$\partial_j f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_j) - f(x_0)}{h}$$

Beispiele 2.23:

$$(1) \text{ Sei } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Dann ist  $(\partial_3 f)(x) =$

$$(2) \text{ Sei } f(x, y) = x y e^{-(x^2 + y)}$$

Dann ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$$

(3) Sei  $f(x, y) = g(y)$  wobei

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig. Dann folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Aus Analysis I folgen die üblichen  
Rechenregeln für partielle Ableitungen:

Satz 2.24. Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  offen und  
 $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar bezüglich  
 $x_j$ :

$$(1) \quad \partial_i (f + g) = \partial_i f + \partial_i g$$

(2) Sei  $m=1$  also  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$

Dann gilt

$$(2.1) \quad \partial_i (f \cdot g) = \partial_i (f) \cdot g + f \cdot \partial_i g$$

und falls  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$ :

$$(2.2) \quad \partial_i \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{\partial_i f \cdot g - f \cdot \partial_i g}{g^2}.$$

Beispiel 2.25

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \quad \text{in } X = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

Für späteren Gebrauch führen wir noch folgende Definitionen ein:

Def. 2.26. (Jacobi matrix)

Sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$   
 $\cap$  offen  
 $\mathbb{R}^n$

für welche die partiellen Ableitungen existieren. Sei  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

Die Jacobi Matrix von  $f$  in  $x$  ist

$$J_f(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

eine Matrix mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.



Def. 2.27  $X \subset \mathbb{R}^n$   
offen.

(1) (Gradient) Sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  so  
dass die partiellen Ableitungen existieren.

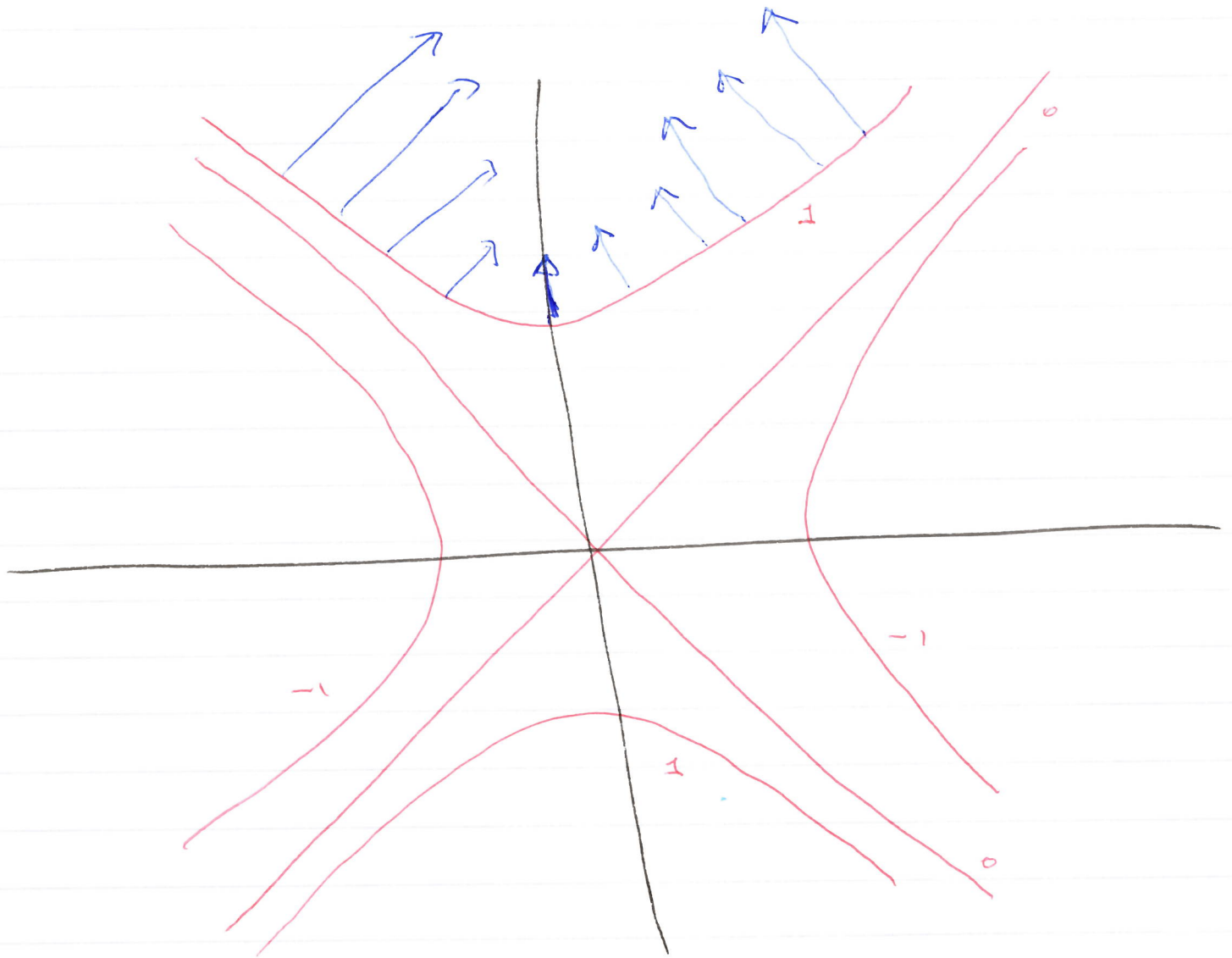
Der Gradient von  $f$  in  $x$  ist  
der Spaltenvektor

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_n f(x_0) \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation:

- 32 -

$$f(x,y) = y^2 - x^2$$



$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

(2) (Divergenz)  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

so dass alle partiellen Ableitungen von  $f_1, \dots, f_n$  existieren.

Die Divergenz von  $f$  in  $x_0 \in X$  ist

$$\operatorname{tr}(\mathcal{J}_f(x_0)) = \sum_{i=1}^n (\partial_i f_i)(x_0)$$

die Spur der Jacobi Matrix.

Geometrische Interpretation:

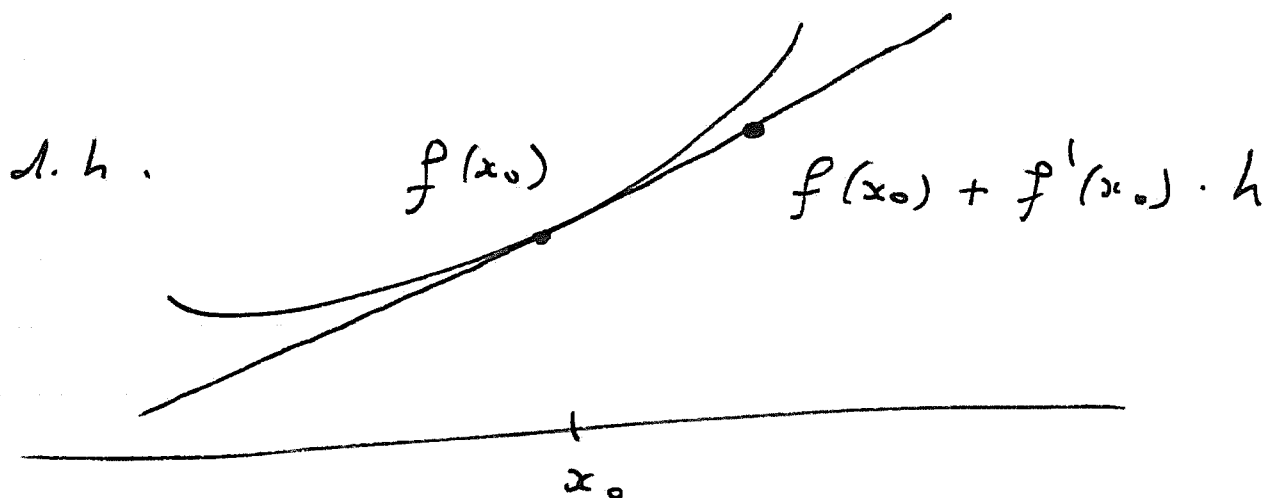
## 2.4. Das Differential.

In Analysis I, § 4.3 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist in  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung  $f'(x_0)$  falls:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + R(x_0, h)$$

Wobei  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0, h)}{h} = 0$ .



Sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  offen,

$f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $x_0 \in X$ .

Def. 2.28:  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar  
falls es eine lineare Abbildung

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gibt so dass  $\forall v \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_0 + v \in X$ .

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + L(v) + R(x_0, v)$$

$$\text{mit } \lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ v \neq 0}} \frac{\|R(x_0, v)\|}{\|v\|} = 0.$$

Notation:  $Df(x_0) = L$

Beispiel 2.29 :

$$\text{Sei } g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dann ist

$$g(x,0) = 0 \quad \forall x$$

$$\text{und somit } \frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = 0$$

$$g(0,y) = 0 \quad \forall y$$

$$\text{also } \frac{\partial g}{\partial y}(0,y) = 0$$

d.h. die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{existieren in } (0,0)$$

aber  $g$  ist nicht differenzierbar  
in  $(0,0)$ .