

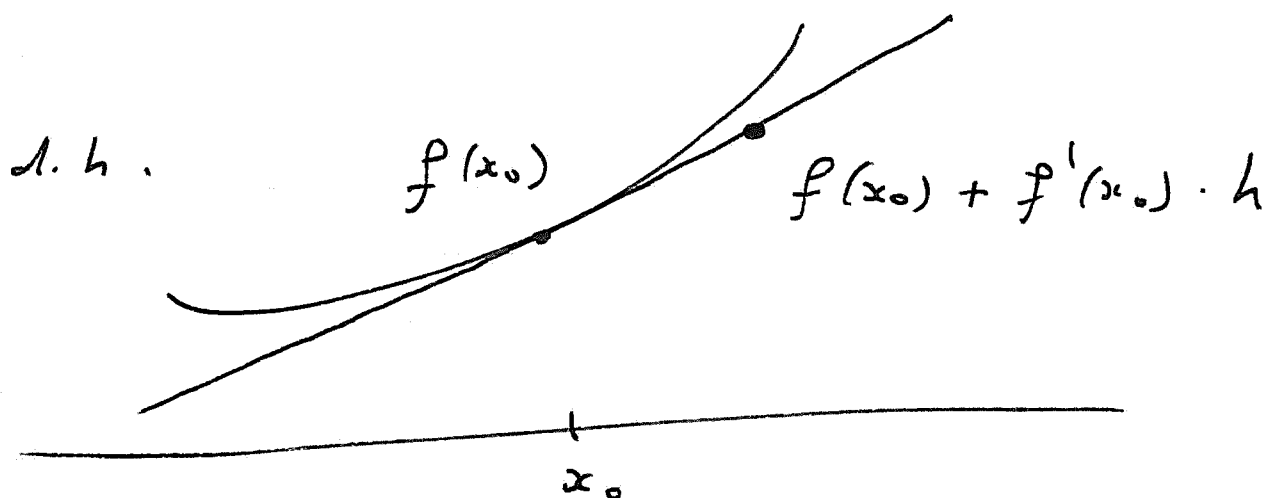
2.4. Das Differential.

In Analysis I, § 4.3 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0)$ falls:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + R(x_0, h)$$

Wobei $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0, h)}{h} = 0$.



Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen,

$f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in X$.

Def. 2.28: f ist in x_0 differenzierbar
falls es eine lineare Abbildung

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gibt so dass $\forall v \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 + v \in X$.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + L(v) + R(x_0, v)$$

$$\text{mit } \lim_{\substack{v \rightarrow 0 \\ v \neq 0}} \frac{\|R(x_0, v)\|}{\|v\|} = 0.$$

Notation: ~~$df(x_0)$~~ $= L$

Beispiel 2.27 $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear

ist $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar und

$$dA(x_0)(v) = A(v).$$

Beispiel 2.30. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$$

f ist genau dann in x_0 differenzierbar

falls $f_1, \dots, f_m$ alle in x_0 differenzierbar

und:

$$\underbrace{(d f)}_{\mathbb{R}}(\underbrace{x_0}_{\mathbb{R}})(v) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix} \cdot v$$

Wie im ein-dimensionalen Fall
folgt aus Differenzierbarkeit auch
Stetigkeit:

Satz 2.31. Sei $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^m$
 $\cap$ offen
 $\mathbb{R}^n$

Aus f differenzierbar in $x_0 \in X$
folgt f stetig in x_0 .

[Siehe [Ko] Prop. 3.4.4. (1)].

Zusammenhang zwischen partiellen
Ableitungen und differential.

Satz 2.32 Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(1) Falls f in x_0 differenzierbar ist
so existieren die Partiellen Ableitungen
 $\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_n f(x_0)$ und die Matrix
der linearen Abbildung $df(x_0)$ ist

$$J_f(x_0) = \left(\partial_j f_i(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

wo bei $f(x) = \left(\cancel{f_1(x)}, \dots, \cancel{f_m(x)} \right)$
 $= \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$.

(2) Falls $2_1 f, \dots, 2_n f$ in X existieren und stetig sind dann ist f in X differenzierbar.

[K₀] Prop 3.4.4. (2), (3), Prop. 3.4.7].

Beispiele 2.33

$$(1) f: \mathbb{R}^2 \setminus (0) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dann ist die Matrix von $df\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ gegeben durch

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \in M_{1,2}(\mathbb{R})$$

$$\text{und: } df\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \frac{xu + yv}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(2) (Gegenbeispiel).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann ist f in $(0, 0)$ stetig ;

$$f(x, 0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$$

$$f(0, y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0.$$

Falls f in $(0, 0)$ diff. wäre :

$$\text{Satz 2.32 (1)} \Rightarrow : \quad df(0, 0) = 0.$$

Aber

(3) Der Fall $m=1$ und der Gradient :

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{differenzierbar.}$$

$\wedge$
 $\mathbb{R}^n$

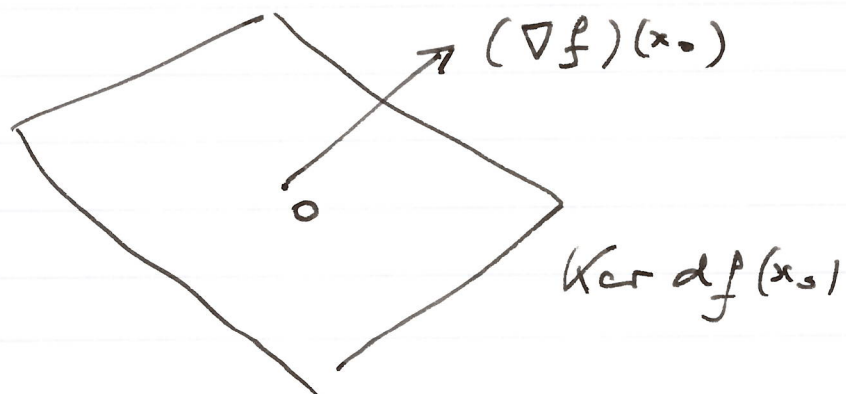
Matrix von $df(x_0) : (\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_n f(x_0))$

und somit:

$$df(x_0)(v) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x_0) v_i$$

$$= \langle (\nabla f)(x_0), v \rangle$$

wobei $\langle \rangle$ das Skalarprodukt
bezeichnet.



Operationen auf differenzierbare Funktionen:

Satz 2.34 ([K.] Prop. 3.4.6)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar.

(1) Dann ist $f + g: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar und

$$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$$

(2) Falls $m=1$, dann ist $f \cdot g$ differenzierbar und ~~$d(fg)(x_0) =$~~

$$d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) dg(x_0) + g(x_0) df(x_0)$$

(3) Falls $m=1$ und $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$ dann ist f/g differenzierbar.

Verknüpfung:

Satz 2.35 ([K0] Prop. 3.4.9; Kettenregel)

Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$

offen $\cap$
 $\mathbb{R}^n$

$\cap$ offen
 $\mathbb{R}^m$

f in X und g in Y differenzierbar.

Dann ist $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar

und:

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$$

Für die Jacobi Matrizen gilt dann

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$$



Matrizenprodukt!

Beispiele 2.36.

(1) Sei $n=m=p=2$,

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}, \quad g(u,v) = \begin{pmatrix} g_1(u,v) \\ g_2(u,v) \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$(g \circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(f_1(x,y), f_2(x,y)) \\ g_2(f_1(x,y), f_2(x,y)) \end{pmatrix}$$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(x,y) & \partial_y f_1(x,y) \\ \partial_x f_2(x,y) & \partial_y f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$J_g(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_u g_1(u,v) & \partial_v g_1(u,v) \\ \partial_u g_2(u,v) & \partial_v g_2(u,v) \end{pmatrix}$$

- 45 -

$$J_{g \circ f}(x, y) = J_g(f_1(x, y), f_2(x, y)) J_f(x, y).$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad g(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \end{pmatrix}$$

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

$$J_g(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix}$$

$$J_{g \circ f}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(y^2) & -x^2 \sin(y^2) \\ \sin(y^2) & x^2 \cos(y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x \cos(y^2) & -2y x^2 \sin(y^2) \\ 2x \sin(y^2) & 2y x^2 \cos(y^2) \end{pmatrix}.$$

(2) Sei $p = 1$:

Dann ist $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x), \dots, \partial_n f_1(x) \\ \vdots \\ \partial_1 f_m(x), \dots, \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$J_g(u) = (\partial_1 g(u), \dots, \partial_m g(u))$$

Somit:

$$J_{g \circ f}(x) = (\partial_1 (g \circ f)(x), \dots, \partial_n (g \circ f)(x))$$

und:

$$\partial_j (g \circ f)(x) = \sum_{i=1}^m \partial_i g(f(x)) \cdot \partial_j f_i(x)$$

- 51 -

$$(3) \quad I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

offen $\cap$
 $\mathbb{R}$

$$\text{Wobei } f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist:

$$J_{g \circ f}(t) = \left(\partial_1 g(f(t)), \dots, \partial_m g(f(t)) \right) \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_m(t) \end{pmatrix}$$

Also:

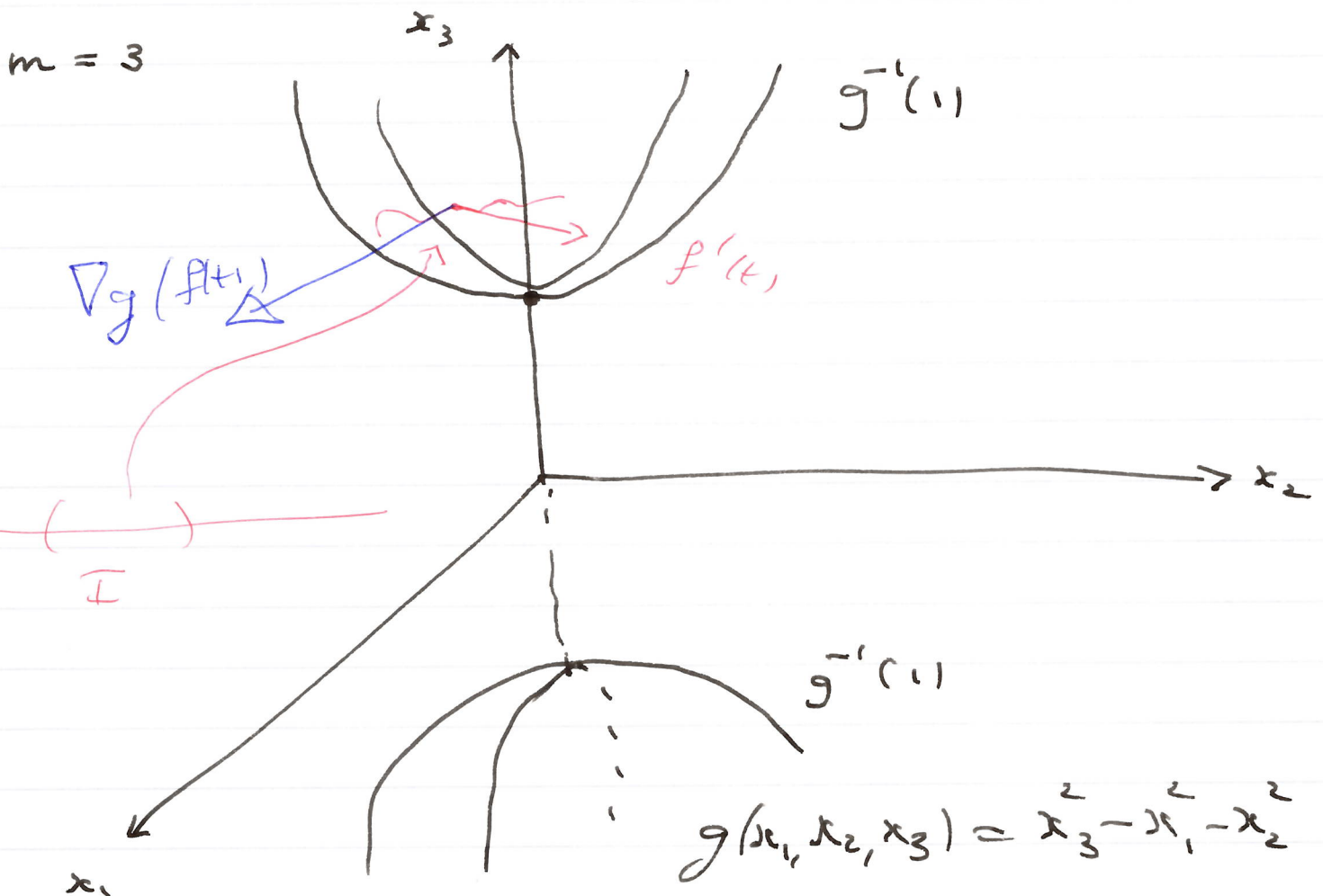
$$\begin{aligned} (g \circ f)'(t) &= \sum_{i=1}^m (\partial_i g)(f(t)) \cdot f'_i(t) \\ &= \langle \nabla g(f(t)), f'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Sei $c \in \mathbb{R}$, wir betrachten die
Niveau (hyper)-Fläche:

$$g^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^m$$

und nehmen an $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$

ist eine in $g^{-1}(c)$ enthaltene Kurve.



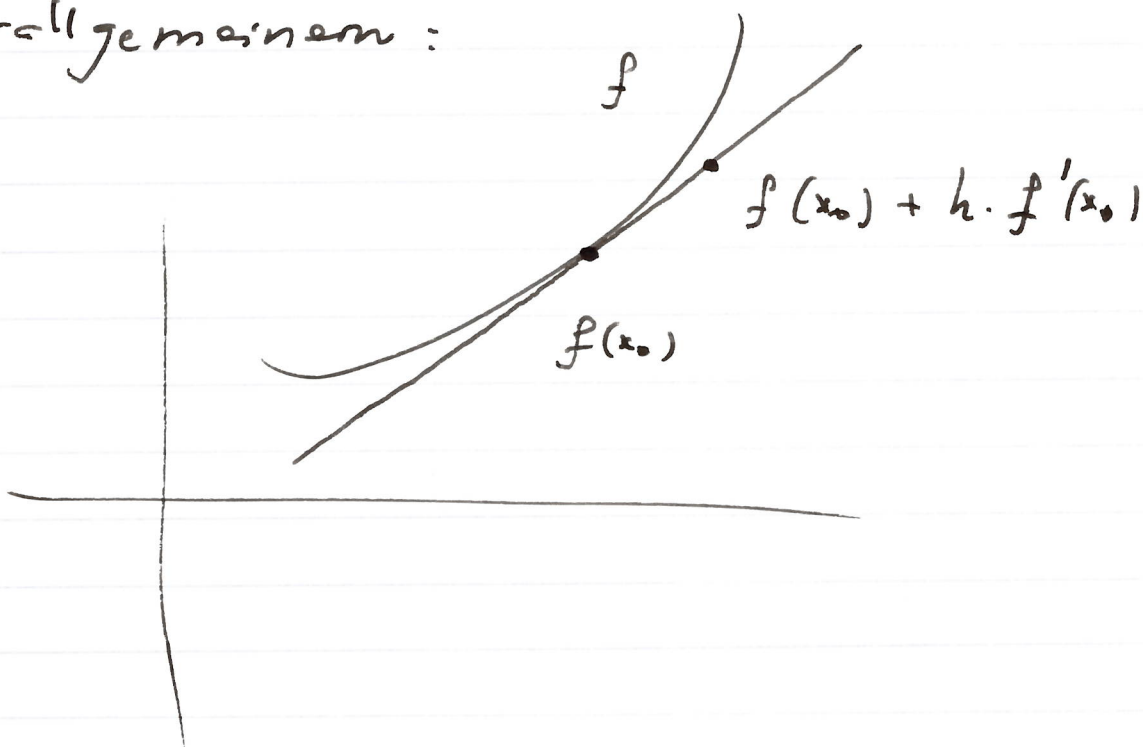
Dann ist offensichtlich

$$(g \circ f)'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

und somit steht

$$\nabla g(f(t)) \text{ senkrecht zu } f'(t).$$

Willen folgendes geometrische Bild
verallgemeinern:



$$X \subset \mathbb{R}^n \quad f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

offen x_0

f differenzierbar. Dann ist:

$$\text{graph}(f) = \{ (x, y) \in X \times \mathbb{R}^m : y = f(x) \}$$

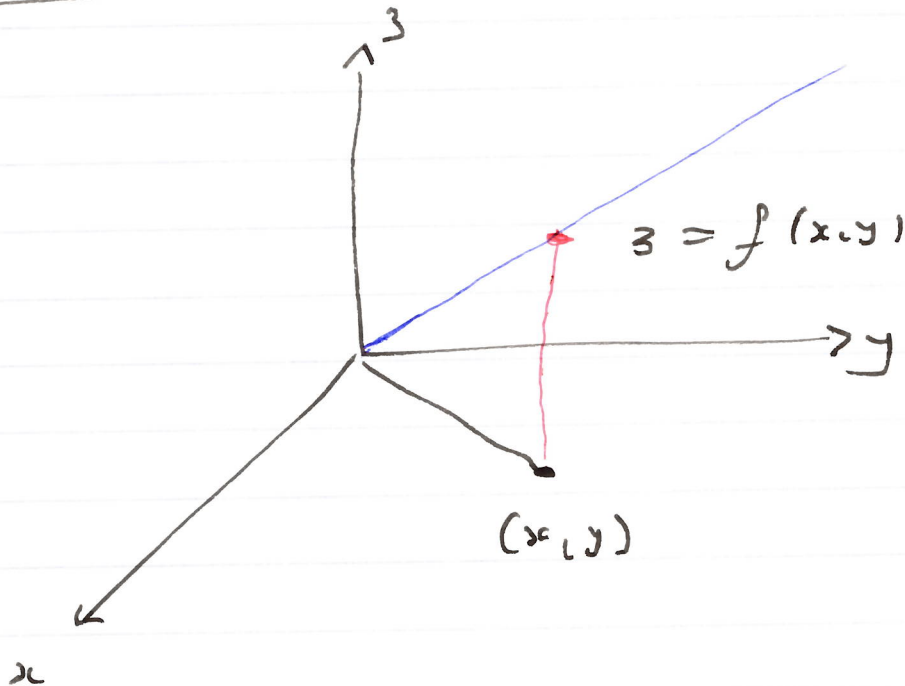
$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)}_{g(x)} + R(x, x - x_0)$$

Def. 2.37 ([K0] Def 3.4.4)

Wir nennen Tangentialraum in x_0
zum Graph von f den Graph der
affinen Approximation g :

$$\begin{aligned} & \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y = g(x) \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) \} \end{aligned}$$

Beispiel 2.38 : $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



$$df(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right)$$

"
Tangentienraum in (x_0, y_0) :

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\}$$

in $(x_0, y_0) = (3, 4)$:

$$z = 5 + \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 4 \end{pmatrix}$$

$$= 5 + \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4)$$

Falls f in x_0 differenzierbar ist
kann man $df(x_0)(v)$ als
"Richtungsableitung" interpretieren:

Def 2.39 ([K0] Def 3.4.13)

$$f: \underset{\substack{\text{offen} \\ \mathbb{R}^n}}{X} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$x_0 \in X$. Dann hat f Richtungs-
ableitung $w \in \mathbb{R}^m$ in die Richtung $\alpha \in \mathbb{R}^n$

$$\text{falls} \quad w = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + t\alpha) - f(x_0)}{t}.$$

Bemerkung: $\partial_j f(x_0) =$ Richtungsableitung
in die Richtung e_j falls
der Limes existiert.

Satz 2.40 Falls f in x_0 differenzierbar
dann hat f Richtungsableitung

$$df(x_0)(v)$$

für alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$.

Fall $n = 1$: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)$$

$$= t \langle \nabla f(x_0), v \rangle + R$$

Also ist die Richtungsableitung in
Richtung v gleich

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle.$$

Nach C.S.:

$$- \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|u\| \leq \langle \nabla f(x_0), u \rangle \leq \|\nabla f(x_0)\| \|u\|$$

Als. hat die Funktion f in x_0

maximalen Zuwachs in die Richtung

$\nabla f(x_0)$.