

2.5. Höhere Ableitungen.

Motivation:

- Approximation von glatten Funktionen mittels Taylorpolynome.
- Bestimmung von Maxima und Minima.

Def. 2.41 ([Kw] Def. 3.5.1) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$
offen

$f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$.

(1) f ist C^1 auf X falls f
auf ganz X differenzierbar ist und
die partiellen Ableitungen

$\partial_1 f, \dots, \partial_n f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$
stetig sind.

(2) Sei $k \geq 2$. Dann ist f auf X
 C^k falls $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ in C^{k-1} sind.

$C^k(X, \mathbb{R}^m) =$ Raum der C^k -Abbild.

$$C^\infty(X, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(X, \mathbb{R}^m).$$

Beispiele 2.42

(1) $C^k(X, \mathbb{R}^m)$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

(2) $f, g \in C^k(X, \mathbb{R})$ folgt $f \cdot g \in C^k(X, \mathbb{R})$

und falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$, folgt

$$f/g \in C^k(X, \mathbb{R}^m).$$

(3) (Kartesisches Produkt)

$$\text{Sei } f: X \rightarrow \mathbb{R}^m, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

dann gilt:

$$f \in C^k(X, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow \{f_1, \dots, f_m\} \subset C^k(X, \mathbb{R}).$$

(4) Polynome sind in $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

(5) Falls $f_1, \dots, f_n \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

dann ist

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_1(x_1) - \dots - f_n(x_n)$$

in $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Anwendung: (5) ^{+①} $\Rightarrow$ (4).

(6) Verknüpfung von C^k -Abbildungen
ist C^k .

Wieviele partielle Ableitungen der
Ordnung 2 gibt es?

Mit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kann man

a priori n^2 solche bilden:

$$\partial_1(\partial_1 f) \quad \partial_1(\partial_2 f) \quad \dots \quad \partial_1(\partial_n f)$$

$\vdots$

$$\partial_n(\partial_1 f) \quad \dots \quad \partial_n(\partial_n f).$$

Beispiel: $f(x, y) = x^4 y^2 + x y^3.$

Eine partielle Ableitung der Ordnung

k ist eine Iteration

$$\partial_{x_{i_1}} \partial_{x_{i_2}} \dots \partial_{x_{i_k}}$$

von partiellen Ableitungen.

Satz 2.43.

$$(1) \quad X \subset \mathbb{R}^2, \quad f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

offen

in $C^2(X, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$(\partial_x \partial_y f)(x, y) = (\partial_y \partial_x f)(x, y)$$

$$\forall (x, y) \in X.$$

$$(2) \quad f \in C^k(X, \mathbb{R}^m) \quad \text{wobei } X \subset \mathbb{R}^n.$$

Dann hängt eine partielle Ableitung

von f der Ordnung k nicht davon

- 64 -

ab in welcher Reihenfolge die partiellen Ableitungen ausgeführt werden.

Gegenbeispiel 2.44.

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x \cdot y \cdot g(x, y)$

Wir interessieren uns für die partiellen Ableitungen von f der Ordnung ≤ 2 in $(0, 0)$:

Für $x \neq 0$:

$$\frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = y g(x, y)$$

Falls $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g(x, y)$ existiert

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = y \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \neq 0}} g(x, y)$$

Für $y \neq 0$:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \neq 0}} g(x, y)$$

$$\text{Also } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ \neq 0}} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \neq 0}} g(x, y)$$

$$\text{und } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \neq 0}} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ \neq 0}} g(x, y)$$

falls die entsprechenden Grenzwerte existieren.

- 66 -

z.B. $g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0)$

$$g(0,0) = \text{irgendetwas!}$$

Aus Satz 2.43 folgt für $f \in C^k(X, \mathbb{R}^m)$

$$\partial_{x_{i_k}} \partial_{x_{i_{k-1}}} \dots \partial_{x_{i_1}} f = \partial_{x_1^{m_1}} \partial_{x_2^{m_2}} \dots \partial_{x_n^{m_n}} f$$

wobei: $\partial_{x_1^{m_1}} = \underbrace{\partial_{x_1} \dots \partial_{x_1}}_{m_1}$

und $m_1 + \dots + m_n = k$.

Notation: $\partial_{x_1^{m_1}} \dots \partial_{x_n^{m_n}} f = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} f$

Übung:

$$\text{Card } \{ (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + \dots + m_n = k \}$$

$$= \binom{n+k-1}{k}$$

Hinweis: berechne $(1+t+t^2+\dots)^n$

auf zwei Arten...

Aus Satz 2.43 folgt: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$

$f \in C^2(X, \mathbb{R})$ dann ist die

$n \times n$ Matrix:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x), & \dots, & \partial_1 \partial_n f(x) \\ \vdots & & \\ \partial_n \partial_1 f(x), & \dots, & \partial_n \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

symmetrisch $\forall x \in X$.

Def. 2.45: die Hessesche Matrix
von f in $x \in X$ ist

$$\text{Hess}_f(x) = \left(\partial_i \partial_j f(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Beispiel 2.46: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$$

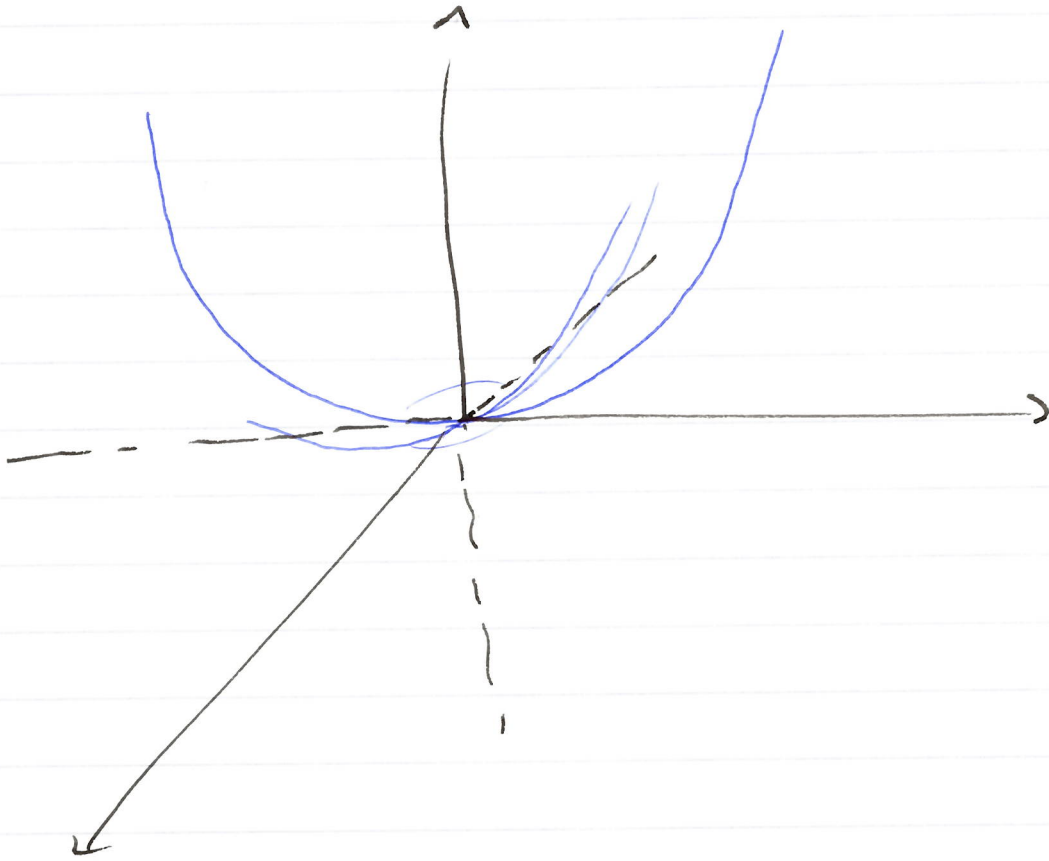
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

— 62 —

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



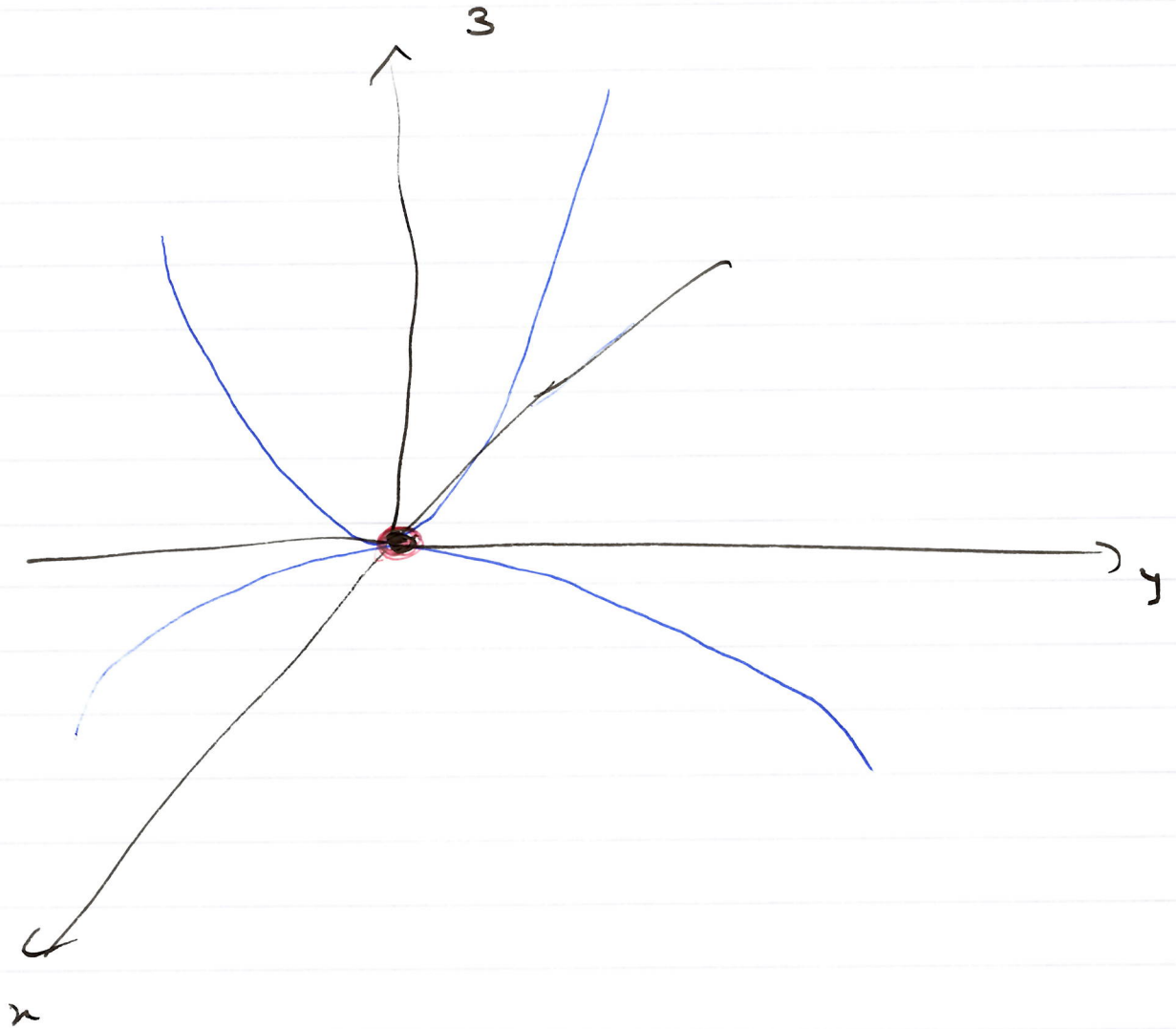
- 70 - .

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$$

$$\text{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$



2.6. Koordinatentransformation.

Wird später behandelt.

Siehe Kowalski 3.6.

2.7. Taylor Polynome.

Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$
 $\cap$ offen
 $\mathbb{R}^n$

in x_0 differenzierbar.

Affine Funktion die f in x_0
"am besten" approximiert.

$$T_1 f(y; x_0) := f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), y \rangle$$

$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) y_i.$$

$T_1 f(y; x_0) =$ Ein Polynom in y von
Grad ≤ 1 .

Fall $f: X \rightarrow \mathbb{R}$
 $\cap$
 $\mathbb{R}$

und f ist in $C^k(X, \mathbb{R})$:

Taylorpolynom:

$$T_n f(y; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)y + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} y^k$$

Approximiert f in x_0 :

$$f(x) = T_n f(x - x_0; x_0) + R_k f(x - x_0; x_0)$$

mit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \neq}} \frac{|R_k f(x - x_0; x_0)|}{|x - x_0|^k} = 0.$$

Def. 2.47: (Taylor Polynom)

Sei $f \in C^k(X, \mathbb{R})$

Das Taylor Polynom von f in x_0 der Ordnung k ist:

$$T_k f(y; x_0) := f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) y_i + \\ + \dots + \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_n = k}} \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}(x_0) y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$$

Vereinfachung der Notation:

für $m = (m_1, \dots, m_n)$ auch

Multindex genannt definieren

Wir:

$$m! = m_1! \dots m_n!$$

$$|m| = m_1 + \dots + m_n$$

$$y^m = y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$$

wobei $y = (y_1, \dots, y_n)$

-74-

Und $\partial_x^m f := \frac{\partial^{m_1} f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}$

Dann ist:

$$T_k f(y; x_0) = \sum_{|m| \leq k} \frac{1}{m!} \partial_x^m f(x_0) y^m$$

$k=2$:

$$T_2 f(y; x_0) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) y_i$$

$$+ \sum_{m_1 + \dots + m_n = 2} \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}(x_0) y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$$

Multindices $(m_1, \dots, m_n)$ mit

$$m_1 + \dots + m_n = 2.$$

-75-

Für jedes $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{array}{ccc} (0, \dots, 2, \dots, 0) & \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) y_i^2 \\ \uparrow & \\ i & \end{array}$$

Für jedes $1 \leq i < j \leq n$:

$$\begin{array}{ccc} (0, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) & \frac{1}{1!1!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) y_i y_j \\ \uparrow \quad \quad \uparrow & \\ i \quad \quad j & \end{array}$$

Quadratische Summand:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) y_i^2 + \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) y_i y_j$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) y_i^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) y_i y_j \right\}$$

- 76 -

$$= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) y_i y_j$$

$$= \frac{1}{2} {}^t y \operatorname{Hess}_f(x_0) y$$

Wobei $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ${}^t y = (y_1, \dots, y_n)$

Also:

$$\boxed{T_2 f(y; x_0) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), y \rangle + \frac{1}{2} {}^t y \operatorname{Hess}_f(x_0) y}$$

Satz 2.48 Sei $f \in C^k(X, \mathbb{R})$:

$$\text{Dann: } f(x) = T_k f(x - x_0, x_0) + E_k f(x, x_0)$$

$$\text{Wobei: } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \neq}} \frac{E_k f(x, x_0)}{\|x - x_0\|^k} = 0.$$

$k=2$:

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} (x - x_0)^T \underset{f}{\text{Hess}}(x_0) (x - x_0) + E_2(x; x_0)$$

Beispiel: $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
um $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$f(x, y) = -1 + \frac{1}{2} (x-1, y-1) \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + E_2.$$

Bemerkung: $\forall \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \forall \geq 0$

mit Gleichheit $\iff \forall = 0$.

Wie kommt man auf das
Taylorpolynom?

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und

betrachten:

$$g(t) = f(x_0 + ty).$$

Dann ist $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt

Und ~~aus~~ aus Analysis I folgt:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \frac{1}{6} g^{(3)}(\theta)$$

Wobei $0 \leq \theta \leq 1$.

Berechnen wir $g(1)$, $g'(1)$, $g''(0)$:

- 77 -

$$g'(t) = \partial_1 f(x_0 + ty) y_1 + \partial_2 f(x_0 + ty) y_2$$

$$g''(t) = \partial_{11} f(x_0 + ty) y_1^2 + \partial_{21} f(x_0 + ty) y_2 y_1 \\ + \partial_{12} f(x_0 + ty) y_1 y_2 + \partial_{22} f(x_0 + ty) y_2^2$$

Also:

$$g'(0) = \partial_1 f(x_0) y_1 + \partial_2 f(x_0) y_2.$$

$$g''(0) = {}^t(y_1, y_2) \text{Hess}_f(x_0) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$