

Unter ein beziehen der Übung 3 in
Serie 7 können wir Satz 2.53 im
Fall $n=2$ wie folgt formulieren:

Korollar 2.55: (Siehe [Ko] Remark 3.88(2))

Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$
 $\cap$ -offen
 $\mathbb{R}^2$

eine C^2 -Funktion und $x_0 \in X$

ein kritischer Punkt.

(1) Falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) > 0$ und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) \right)^2 > 0$$

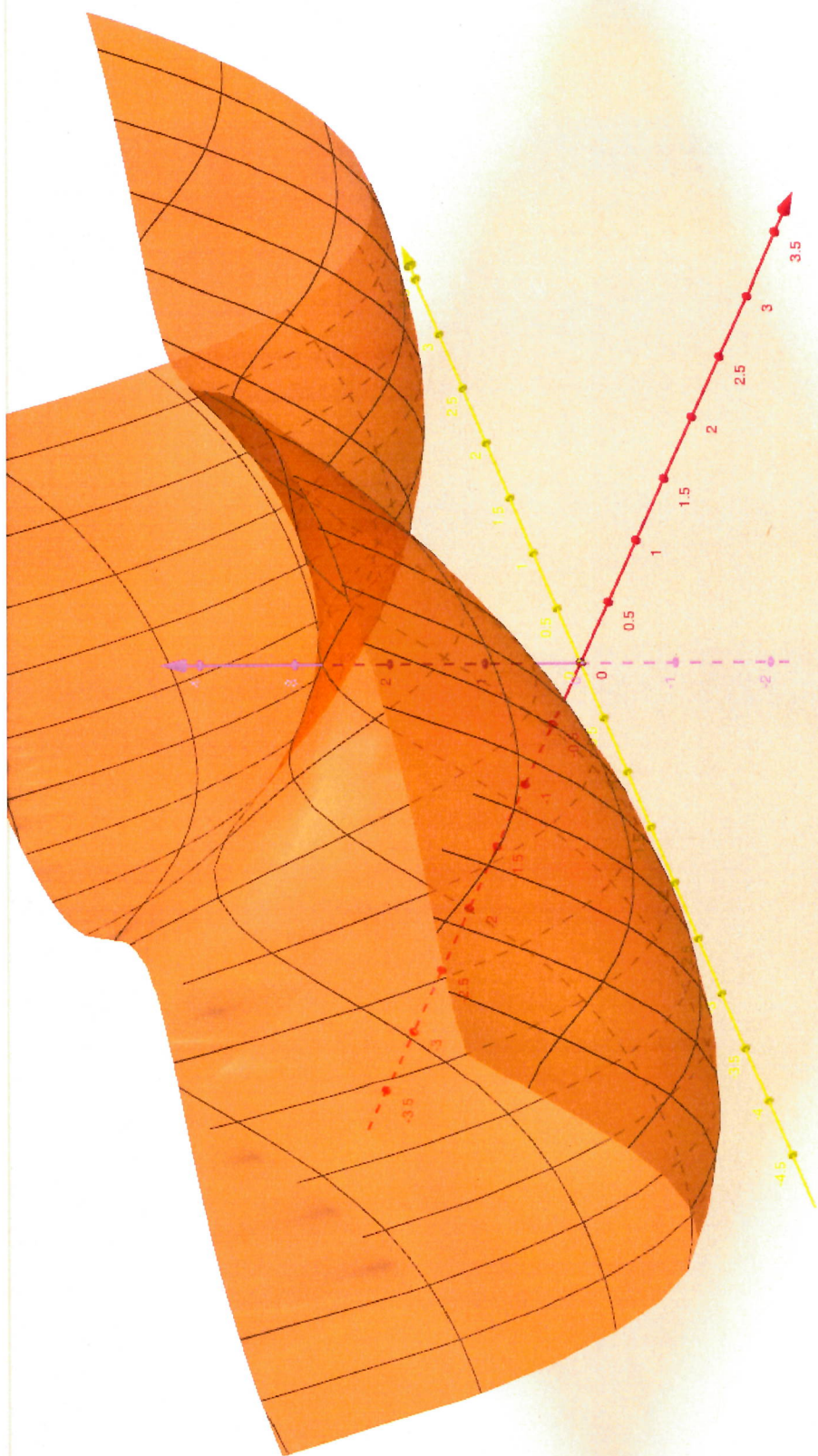
so ist x_0 eine lokale Minimalsstelle.

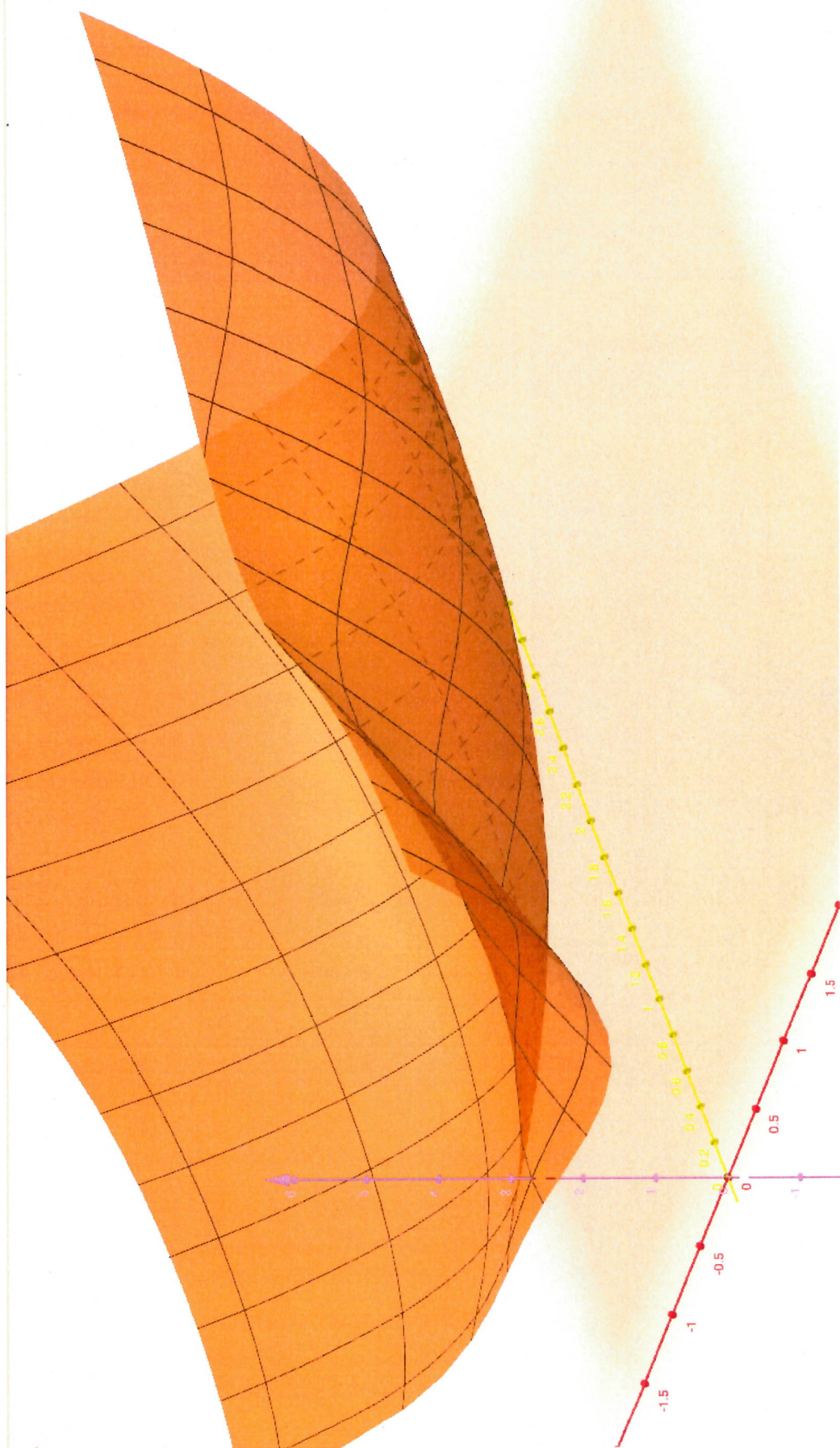
$$(2) \text{ Falls } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) < 0$$

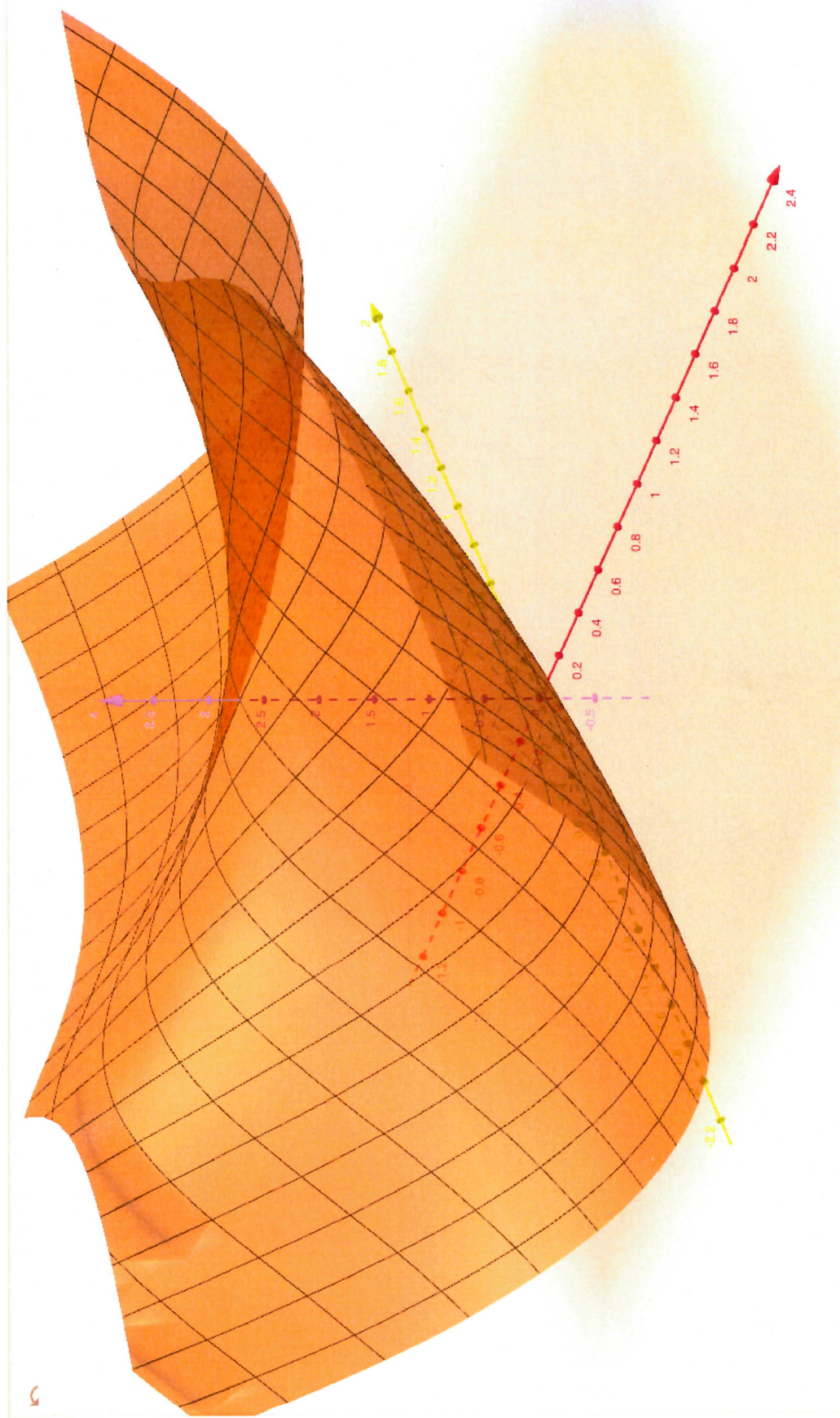
$$\text{und } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 (!)$$

so ist x_0 eine lokale Maximalestelle.

Beispiel

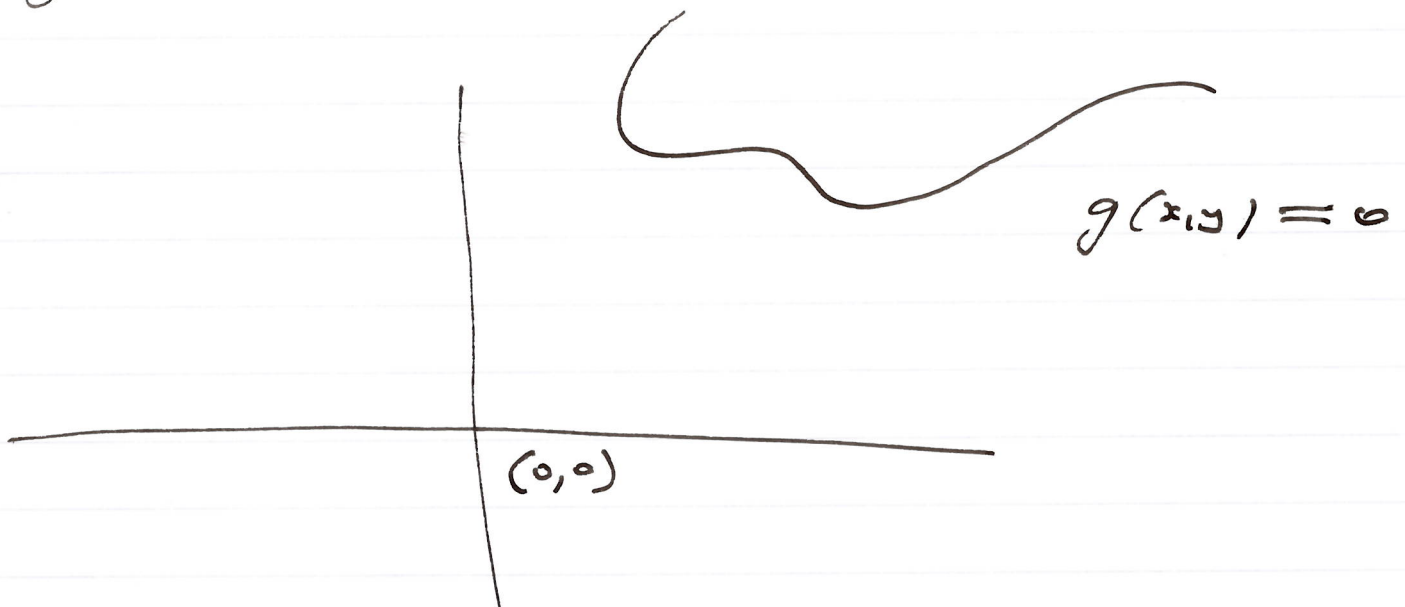






2.9. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen. ([K0] 3.9)

Typisches Problem:



Sei eine Kurve C in $\mathbb{R}^2$ durch
eine Gleichung

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0 \}$$

gegeben. Man finde den (oder die...) Punkt auf C der zu $(0,0)$

den Minimalen Abstand aufweist.

Es geht also darum Minima der Funktion $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ mit Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ zu finden.

Idee: drücke y als Funktion von x aus, $y = h(x)$ und reduziere das Problem auf das Finden des Minimum der Funktion

$$f(x, h(x)) = \sqrt{x^2 + h(x)^2}.$$

Problem: In einfachen Fällen

wie $g(x, y) = x^5 - x + y^5 - y - 1$

gibt es kein "explizites" h .

Dieses Problem kann man umgehen.

Die Lösung wird von der Multiplikationsregel von Lagrange beschrieben.

Seien also $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen der

Klasse C^1 . Sei:

$$Y = \{x \in X : g(x) = 0\}.$$

Dann ist $x_0 \in Y$ eine lokale

Maximalstelle der Einschränkung

$f|_Y$ von f auf Y falls es $\delta > 0$

gibt mit

$$f(y) \leq f(x_0) \quad \forall y \in C(x_0, \delta) \cap Y.$$

Analog definiert man lokale

Minimalstelle von $f|_Y$.

Satz 2.5c ([K0] Prop. 3.3.2)

Falls $x_0 \in Y$ eine lokale
Extremalstelle von $f|_Y$ ist
so gilt entweder $\nabla g(x_0) = 0$
oder es gibt $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit
 $\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0)$.

λ_0 ist der Lagrange Multiplikator.

Äquivalent:

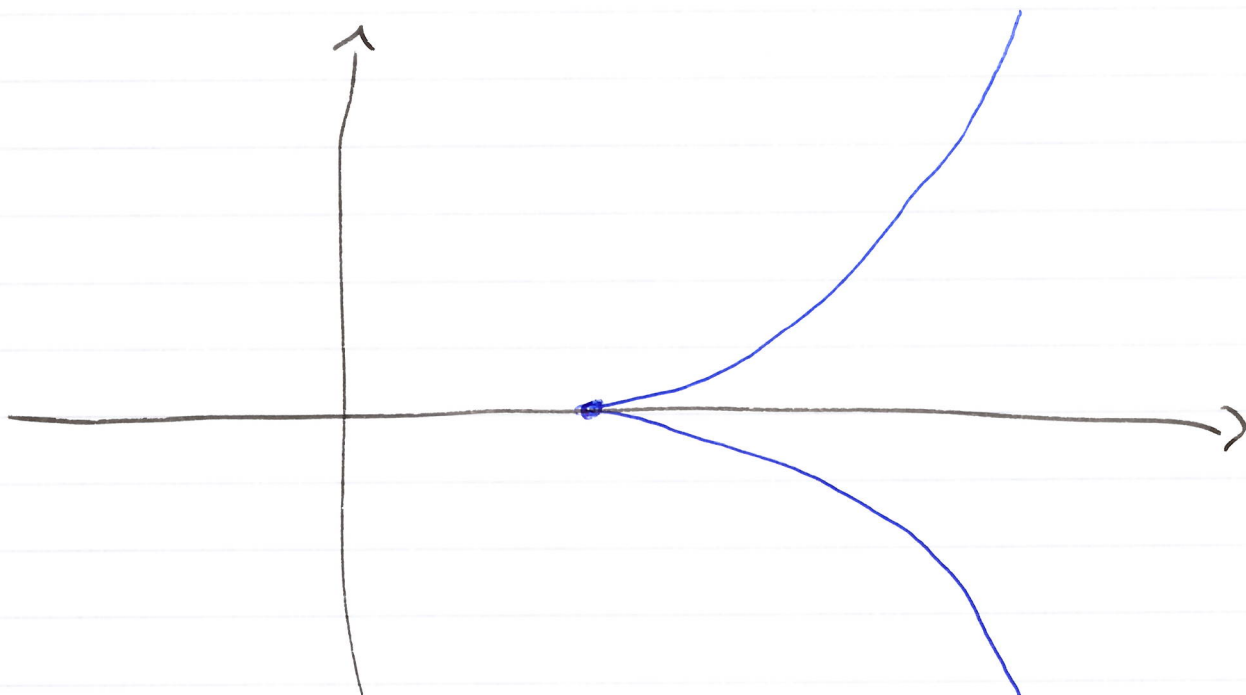
$$\left\{ \text{Menge der lokalen Extremalstellen von } f|_Y \right\} \\ \subset \left\{ x_0 \in Y : \nabla g(x_0) = 0 \text{ oder } \nabla f(x_0) \text{ und } \nabla g(x_0) \text{ kollinear} \right\}$$

Später werden wir ein heuristisches Argument für Satz 2.56 präsentieren.

Zunächst behandeln wir einige wichtige Beispiele.

Beispiele 2.57

$$(1) \quad g(x, y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$$



Minimiere $f(x, y) = x^2 + y^2$ auf

$$Y = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0 \}.$$

- 10 -

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 3(x-1)^2 \\ -2y \end{pmatrix}$$

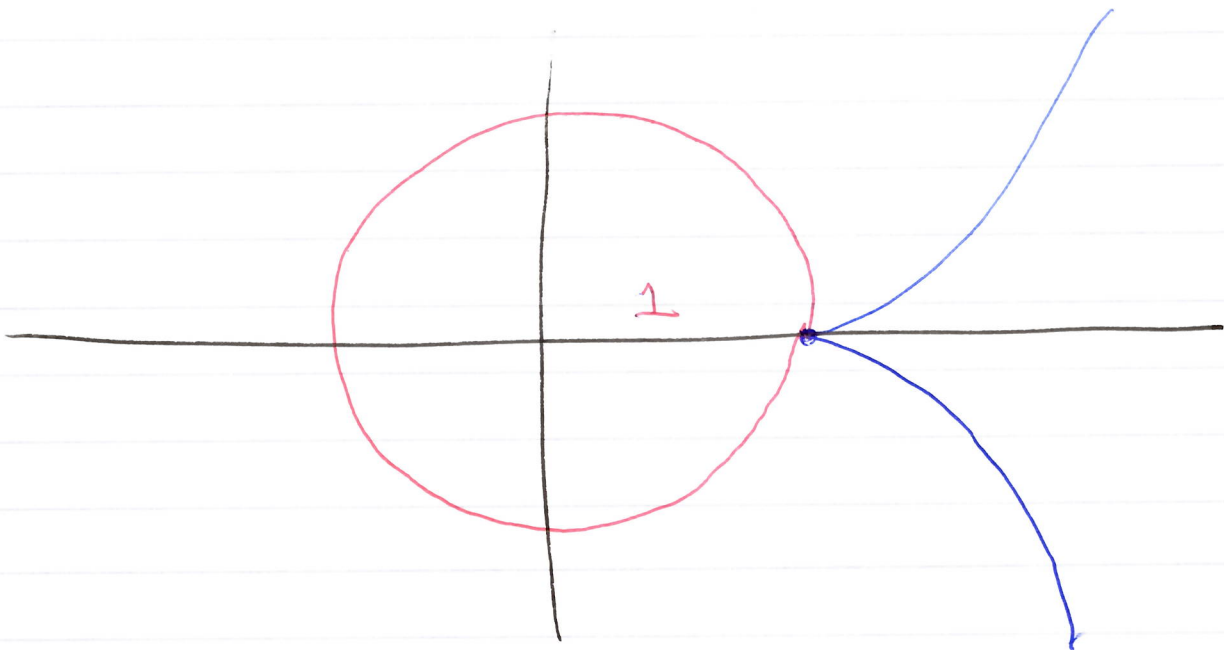
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x, y) = (1, 0).$$

Ansonsten:

$$\nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - \lambda \cdot 3(x-1)^2 \\ 2y(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall (x, y) \in \mathcal{X}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.



Also: $f(1,0) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in Y$.

Und kein $(x,y) \in Y \sim \{(1,0)\}$

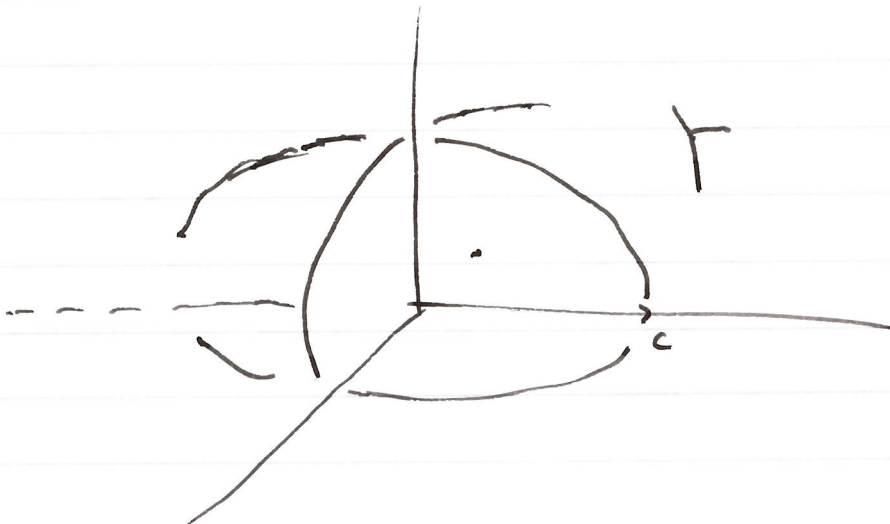
ist Extremalstelle von f .
lokale

(2) Sei $c > 0$. Gesucht sei
das Maximum der Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 y^2 z^2$$

mit Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2.$$



Da f stetig und

$$Y = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 = 0 \}$$

kompakt, hat $f|_Y$ ein Minimum und Maximum.

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Y.$$

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) :$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y^2 & 2z^2 \\ 2y & x^2 & 2z^2 \\ 2z & x^2 & y^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad (*)$$

Lösungen mit $x \cdot y \cdot z = 0$ können wir ausschließen, weil für diese Werte die Funktion $f(x, y, z) = (xyz)^3$ ihren kleinsten Wert 0 annimmt.

$$\text{Aus } xyz \neq 0 \text{ folgt } x^2 = y^2 = z^2$$
$$\lambda = x^4$$

und erhalten:

$$x = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad y = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad z = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}$$

In jedem Fall:

$$\boxed{f(x, y, z) = \frac{c^6}{27}}$$

d.h. das Maximum der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$$

unter Nebenbedingung

- 112 -

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$

$$\text{ist } \frac{c^2}{3}$$

$$\text{Also folgt: } \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \leq \frac{c^2}{3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

$$\text{d.h. } \forall x, y, z \geq 0:$$

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

mit Gleichheit genau dann falls

$$x = y = z.$$

(3) Beispiel (2) illustriert einen

Wichtigen Spezialfall.

Nämlich: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf

$\mathbb{R}^n$ definiert und C^1 , und

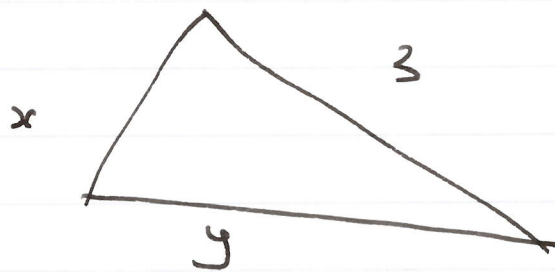
$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$$

kompakt.

Dann besitzt $f|_Y$ ein Minimum und ein Maximum auf Y . Satz 2.56 führt dann (meistens...) zu einer Bestimmung dieser Extremalstellen.

Bemerkte, dass $Y \subset \mathbb{R}^n$ immer abgeschlossen ist, da g stetig. Die Frage ist dann ob Y beschränkt ist, was meistens leicht festzustellen ist.

(4) Wir suchen dasjenige Dreieck



mit Seitenlängen x, y, z welches bei

gegebenen Umfang 2.5 den größten Flächeninhalt besitzt.

Es ist: $2.5 = x + y + z$ und
für den Flächeninhalt $A(x, y, z)$
gilt nach Heron:

$$A(x, y, z) = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

Können annehmen $A > 0$ und
beschränken uns also auf

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0 \right. \\ \left. s-x > 0, s-y > 0, s-z > 0 \right\}$$

die eine offene Teilmenge von
 $\mathbb{R}^3$ ist.

Rechnerisch einfacher aber äquivalent:
Wir suchen ein Max. für

$$f(x, y, z) = A(x, y, z)^2 = s(s-x)(s-y)(s-z)$$

auf X mit Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x + y + z - 2s = 0.$$

$$\text{Nun ist } \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also suchen wir Lösungen für

$$\nabla f(x, y, z) - \lambda \nabla g(x, y, z) = 0$$

$$= \begin{pmatrix} -s(s-y)(s-z) \\ -s(s-x)(s-z) \\ -s(s-x)(s-y) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Woraus mit $(x, y, z) \in X$ folgt

$$x = y = z = \frac{2s}{3}$$

das gleichseitige Dreieck.

(5) (Spektralsatz für symmetrische Matrizen).

Sei A eine $n \times n$ symmetrische Matrix
und $M := \max_{\langle x, x \rangle = 1} \langle Ax, x \rangle$.

Dann ist M Eigenwert von A und
jede Maximalstelle x_0 ist ein
Eigenvektor mit Eigenwert M .

Seien $f(x) = \langle Ax, x \rangle$
 $g(x) = \langle x, x \rangle - 1$.

Dann ist $Y = g^{-1}(0)$ die Einheitsphäre
mit Zentrum $0 \in \mathbb{R}^n$, insbesondere
kompakt. Also nimmt $f|_Y$

ein Minimum und Maximum an.

Wir berechnen: $\nabla f(x)$, durch

$$df(x)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle A(x+tv), x+tv \rangle - \langle Ax, x \rangle}{t}$$

$$= \langle A(v), x \rangle + \langle A(x), v \rangle$$

Symmetrie!

$$= 2 \langle A(x), v \rangle$$

Woraus $\nabla f(x) = 2 A(x)$ folgt.

Analog: $\nabla g(x) = 2x$.

Folglich: falls $M = \langle Ax_0, x_0 \rangle$

so ist x_0 lokale Extremalstelle

von $f|_Y$ und da $\nabla g(x) \neq 0$

$\forall x \in Y$ folgt aus Satz 2.56

~ 119 ~

dass es $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0)$$

d.h. $A(x_0) = \lambda_0 x_0$.

Dann folgt:

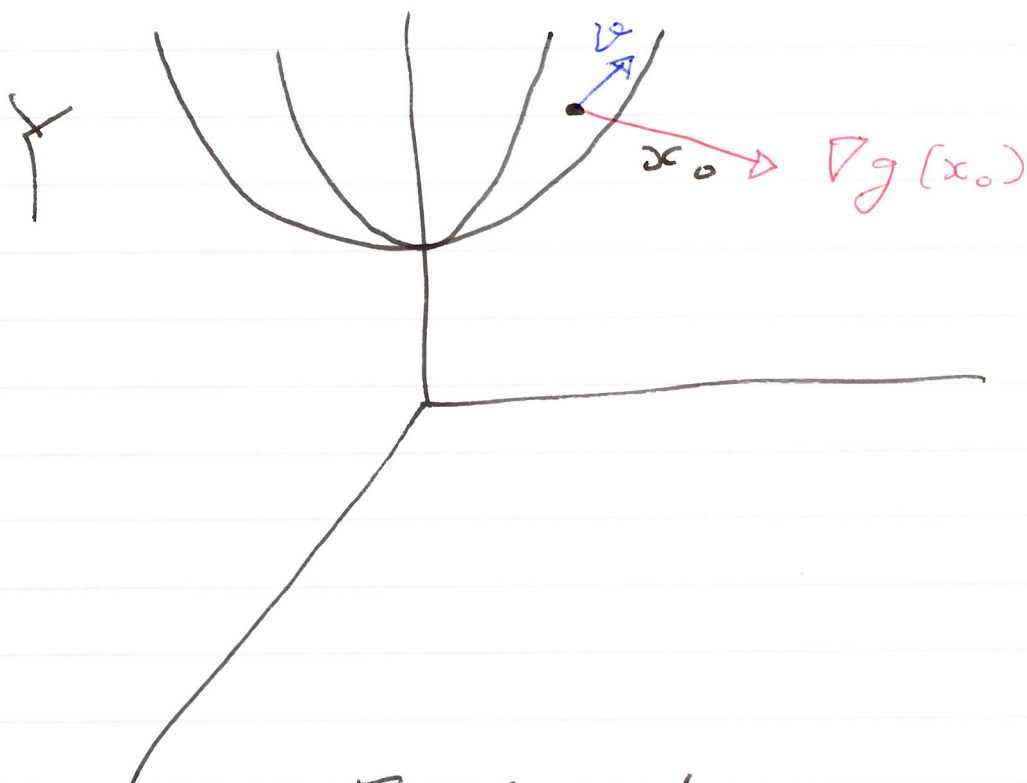
$$\lambda_0 = \langle \lambda_0 x_0, x_0 \rangle = \langle A(x_0), x_0 \rangle = M.$$

Heuristische Argument für Satz

2.56.

Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$Y = \{ x \in \mathbb{R}^3 : g(x) = 0 \}.$$



Annahme $\nabla g(x_0) \neq 0$.

Dann steht $\nabla g(x_0)$ senkrecht
zu Y in x_0 :

jeder Vektor v mit $\langle v, \nabla g(x_0) \rangle = 0$
ist "in der Tangentialebene" zu Y
in x_0 .

Zu jedem v mit $\langle v, \nabla g(x_0) \rangle = 0$
gibt es eine C^1 Kurve:

$$c:]-\delta, \delta[\longrightarrow Y$$

$$\text{mit } \begin{cases} c(0) = x_0 \\ c'(0) = v \end{cases}$$

Es folgt: 0 ist lokale Extremal-
stelle von $t \mapsto f(c(t))$

$$\text{also: } \langle \nabla f(x_0), c'(t) \rangle = 0$$

$$\text{d.h. } \langle \nabla f(x_0), v \rangle = 0.$$

Also steht $\nabla f(x_0)$ auch senkrecht
zur Tangentialebene zu γ in x_0
woraus folgt

$$\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0) \quad \text{für ein} \\ \lambda_0 \in \mathbb{R}.$$