Kapitel 3. Integration in $\mathbb{R}^n$

In diesem Kapitel studieren wir diverse Integralbegriffe und erstellen Verbindungen her. Die meisten dieser Begriffe haben einen physikalischen Ursprung. Die Arbeit eines räumlichen Kraftfeldes führt auf den Begriff des Kurvenintegrals; die Berechnung von Volumina führt auf das Riemann Integral in $\mathbb{R}^n$. Die Greensche Formel verbindet ein Kurvenintegral im $\mathbb{R}^2$ mit einem Flächenintegral und die Gauss-Ostrogradski Formel verbindet ein Flächenintegral im $\mathbb{R}^3$ mit einem Volumenintegral.

4.1. Kurvenintegrale.

Für das Skalarprodukt von Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^n$ benützen wir die Notation:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Grosso Modo:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\bigcap$$

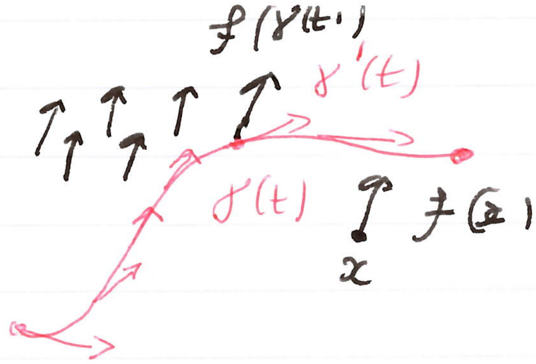
$$\mathbb{R}^n$$

stetiges Vektorfeld

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow X$$

parametrisierte Kurve

Kurven Integral: $\text{"}\int_\gamma f(s)\,ds\text{"} \in \mathbb{R}$

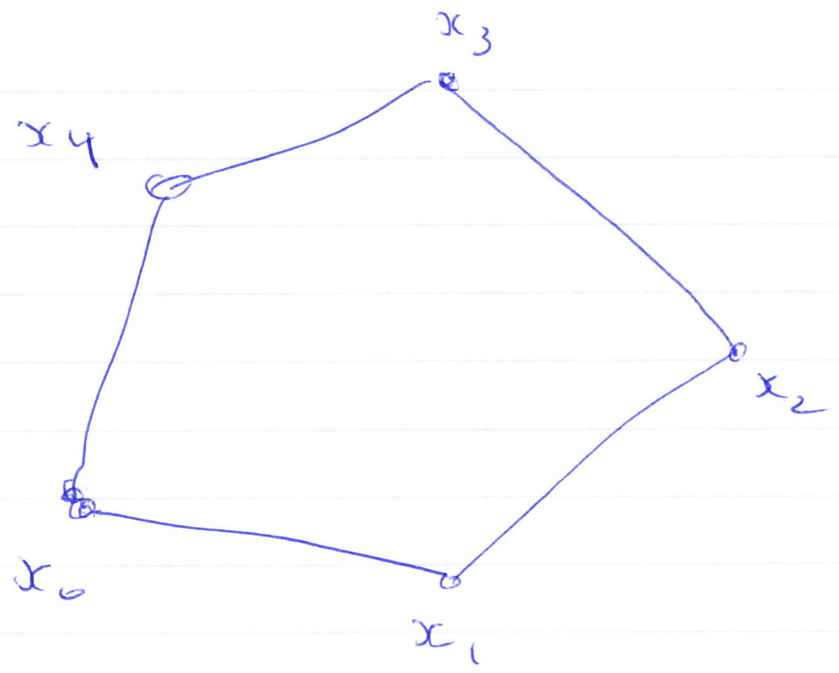


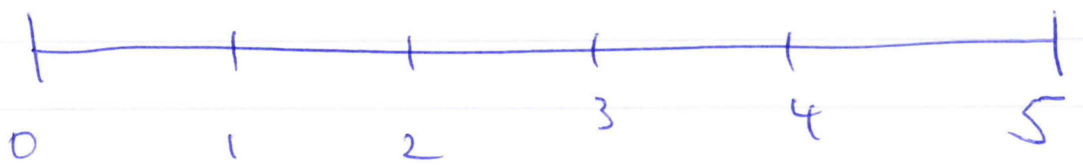
([Ko] Def. 4.1.1.(2))

Def. 3.1 Eine parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ die stückweise C^1 ist: es gibt eine Partition

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

so dass $\gamma|_{]t_{i-1}, t_i[}$ eine C^1-Abbildung ist für alle $1 \leq i \leq k$, und γ' sich auf $[t_{i-1}, t_i]$ stetig erweitert.





$t \in [0,1] \qquad \gamma(t) = (1-t)\,x_0 + t\,x_1$

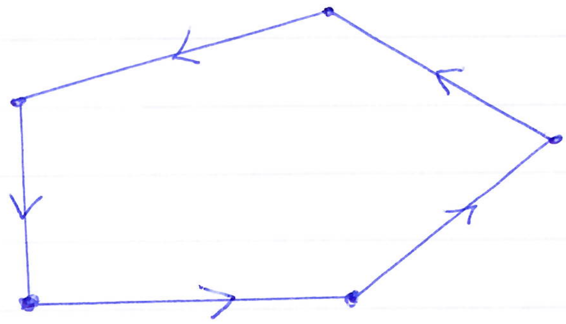
$t \in [1,2] \qquad \gamma(t) = (2-t)\,x_1 + (t-1)\,x_2$

Beachte : $\dot\gamma(t) = x_1 - x_0$ auf $]0,1[$

$\dot\gamma(t) = x_2 - x_1$ – $]1,2[$

Beispiel 3.2: in $\mathbb{R}^2$ ist das Bild einer parametrisierten Kurve.

Hier wird $k \geq 5$.



Definition 3.3 ([Ko] Def. 4.1.1.(3))

Sei $f : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{X}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, auch "stetiges Vektorfeld auf X" genannt und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve mit $\gamma([a,b]) \subset X$.

Das Kurvenintegral von f

entlang γ, bez. mit $\int_\gamma f(s)\,ds$"

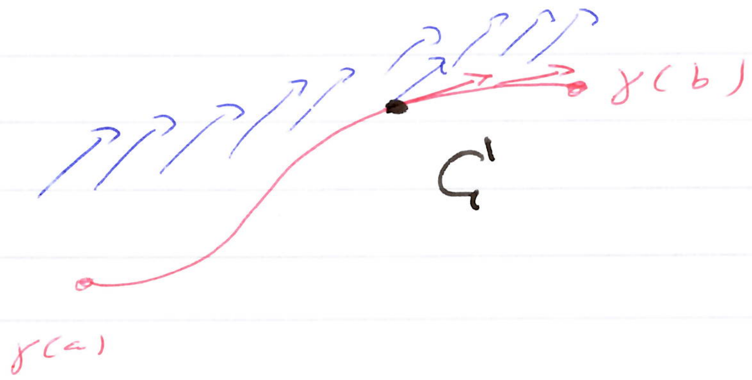
ist
$$\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \,.$$

Bemerkung 3.4.

Die Funktion
$$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

ist stückweise stetig und deshalb Riemann integrierbar.

Bemerkung 3.5 ([Ko] Remark 4.1.3(2))



Wenn ein Massenpunkt sich unter dem Einfluss eines Kraftfeldes längst der Kurve C bewegt, so stellt das Kurvenintegral die bei dieser Bewegung geleistete Arbeit dar.

Beispiele 3.6.

(1)

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto (1-t)x + ty$$

parametrisiert das Segment von x nach y: $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Falls $\gamma([0,1]) \subset X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$,

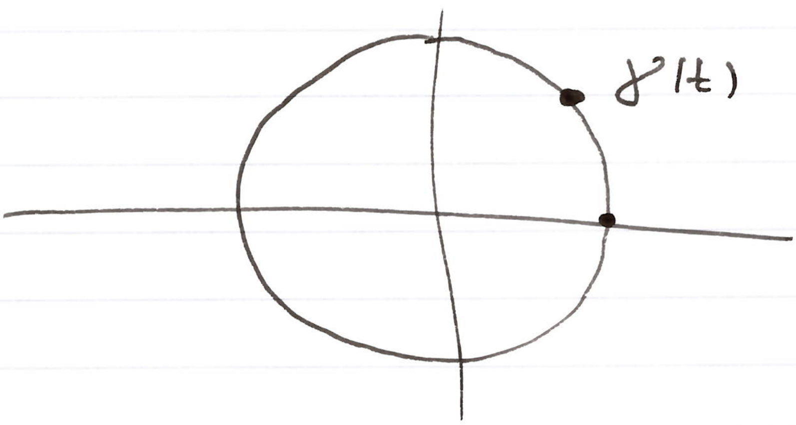
$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ stetiges Vektorfeld,

dann ist:

$$\int_\gamma f(s)\,ds = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \int_0^1 f_i\big((1-t)x + ty\big)\,dt$$

(2) $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$



$f(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

$$f(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Somit $f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

Und $\int_\gamma f(s)\,ds = 2\pi$.

Sei nun: $\gamma_n(t) = (\cos(nt), \sin(nt))$

$t \in [0, 2\pi]$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Dann umläuft γ_n den Einheitskreis

n Mal. Also:

$$\gamma_n'(t) = (-n\sin(nt), n\cos(nt))$$

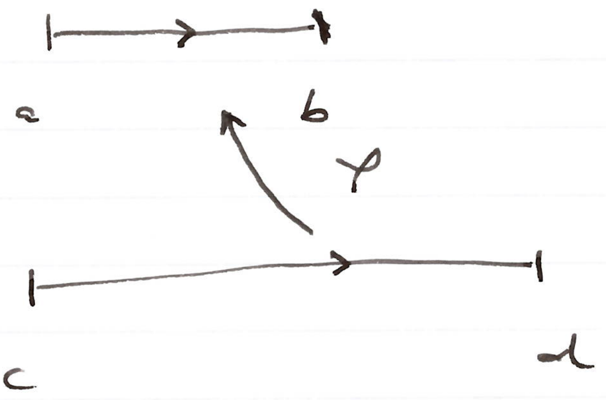
und $\int_{\gamma_n} f(s)\,ds = 2\pi \cdot n$.

Dieses Beispiel illustriert, dass eine parametrisierte Kurve nicht unbedingt injektiv ist.

Die Frage stellt sich nun inwiefern das ~~Kurven~~ Kurvenintegral von der „parametrisierung der Kurve" abhängt.

<u>Definition 3.7</u> Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Eine <u>orientierte</u> Reparametrisierung von γ ist eine parametrisierte Kurve $\sigma : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ wobei $\sigma = \gamma \circ \varphi$

und $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ stetig, streng monoton wachsend, und auf $]c,d[$ differenzierbar, mit $\varphi(c) = a$
$\varphi(d) = b$.



<u>Satz 3.8.</u> ([Ko] Prop. 4.1.5)

Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld auf X
$X \subset \mathbb{R}^n$

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrisierte Kurve mit $\gamma([a,b]) \subset X$ sowie σ eine orientierte Reparametrisierung. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(s)\,ds = \int_\sigma f(s)\,ds$$

<u>Beweis</u>: Sei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ wie in definition 3.7, d.h.

$$\sigma = \gamma \circ \varphi .$$

Dann folgt $\sigma'(t) = \gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

Somit:

$$\int_\sigma f(s)\,ds = \int_c^d f(\sigma(u)) \cdot \sigma'(u)\,du$$

$$= \int_c^d f(\gamma(\varphi(u))) \cdot \left(\gamma'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\right) du$$

$$= \int_c^d \left[f(\gamma(\varphi(u))) \cdot \gamma'(\varphi(u)) \right] \cdot \varphi'(u)\,du$$

Satz 5.4.6. Analysis I mit $t = \varphi(u)$

$$= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \qquad \boxed{\wr\wr\wr}$$

<u>Bemerkung</u>: Informal ist die Aussage von Satz 3.8, dass das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(s)\,ds$$

(bei gegebenem f) nur vom Bild

$G = \gamma([a,b])$ <u>und</u> vom Durchlauf-

-ungssinn der Kurve G abhängt.

<u>Beispiel 3.9</u>: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ parametrisierte Kurve und sei

$$\bar{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

mit $\bar{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$. Dann ist $\bar{\gamma}([a,b]) = \gamma([a,b])$ aber mit entgegengesetztem Durchlaufsinn:

$$\int_{\bar{\gamma}} f(s)\,ds = \int_a^b f(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t)\,dt .$$

Nun ist: $\bar{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$

$$\bar{\gamma}'(t) = -\gamma'(a+b-t)$$

Also:

$$\int_a^b f(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t)\,dt = -\int_a^b f(a+b-t)\gamma'(a+b-t)$$

Substitution $u := a+b-t$

$$du = -dt$$

und das Integral ist dann gleich:

$$\int_b^a f(\gamma(u))\gamma'(u)\,du = -\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

Also:
$$\int_{\bar{\gamma}} f(s)\,ds = -\int_{\gamma} f(s)\,ds .$$