D-HEST | Mathematik III | HS 2021

Prof. Dr. E. W. Farkas

P. Zimmermann

Musterlösung zu Serie 0

1. **Bakterienwachstum**
Das Wachstum einer Bakterienpopulation sei beschrieben durch das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt}P(t) = \lambda P(t)(G - P(t)), \qquad P(0) = P_0.$$

mit reellen Parametern $\lambda, G, P_0 > 0$.

(i) Welche anschauliche Bedeutung haben die Parameter λ und G?

(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem zunächst für allgemeine $\lambda, G > 0$. Für $\lambda = 10^{-7}$ und $G = 3 \cdot 10^6$, skizzieren Sie die Lösungen für die verschiedenen Anfangsbedingungen $P_0^{(1)} = 0.5 \cdot 10^6$ und $P_0^{(2)} = 4 \cdot 10^6$ in ein Koordinatensystem.

Lösung:

(i) Wir definieren die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(P) = \lambda P(G - P)$ für $P \in \mathbb{R}$ und somit kann das Anfangswertproblem geschrieben werden als

$$\frac{dP}{dt}(t) = f(P(t)), \quad P(0) = P_0.$$

Im Gleichgewicht gilt $\frac{dP}{dt}(t) = 0$ was äquivalent ist zu $f(P(t)) = 0$. Die Nullstellen von f sind bei $P_1 = 0, P_2 = G$. Wir bemerken, dass im Bereich $0 < P < G$ gilt $f(P) > 0$ und somit wächst $P(t)$ in diesem Bereich. Andererseits im Bereich $G < P < \infty$ gilt $f(P) < 0$ und somit verkleinert sich der Populationsbestand in diesem Bereich. Dies zeigt, dass es sich bei P_1 um ein instabiles Gleichgeweicht handelt und bei P_2 um ein stabiles Gleichgewicht. Deshalb interpretieren wir P_2 als *Kapazitätsgrenze.* Um das Gleichgewicht in P_2 näher zu untersuchen linearisieren wir die gewöhnliche Differentialgleichung um den Punkt P_2, d.h. wir interessieren uns für Lösungen $P(t)$ sodass $P(t_0) \simeq G$ für ein $t_0 \geq 0$. Dies ergibt

$$\frac{dP}{dt}(t) = \lambda G P(t)$$

und somit ist die Lösung von der Form $P(t) = P(t_0)e^{\lambda G t}$. Deshalb können wir λG als *Wachstumsrate* interpretieren, wenn $P(t_0) \simeq G$ für ein $t_0 \geq 0$. Wenn $t_0 = 0$, dann handelt es sich um die initiale Wachstumsrate.

(ii) Wir trennen die Variablen:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P(G - P) \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dP}{P(G - P)} = \int \lambda dt = \lambda t + C.$$

Für das verbleibende Integral liefert eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{P(G - P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{G - P} \qquad \Rightarrow \qquad A(G - P) + BP = 1,$$

also $A = B = \frac{1}{G}$. Damit ergibt sich

$$\int \frac{dP}{P(G - P)} = \frac{1}{G}\int \left(\frac{dP}{P} + \frac{dP}{G - P}\right) = \frac{1}{G}\ln\left|\frac{P}{G - P}\right| = -\frac{1}{G}\ln\left(\frac{G - P}{P}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{G - P(t)}{P(t)} = K\exp(-\lambda G t) \qquad \Rightarrow \qquad P(t) = \frac{G}{1 + K\exp(-\lambda G t)},$$

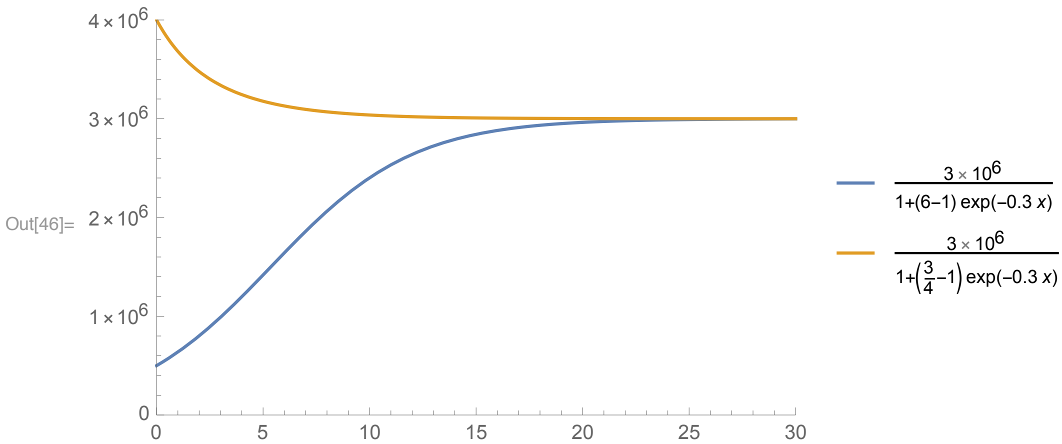
mit einer Konstante $K \in \mathbb{R}$, die durch die Anfangsbedingung festgelegt wird:

$$P_0 = P(0) = \frac{G}{1+K} \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{G}{P_0} - 1.$$

Somit lautet die Lösung des Anfangswertproblems zu vorgegebenen λ, G, P_0:

$$P(t) = \frac{G}{1 + \left(\frac{G}{P_0} - 1\right)\exp(-\lambda G t)}.$$

Die Graphen der Funktion $P(t)$ für $P_0^{(1)}$ (blau) und $P_0^{(2)}$ (orange) haben folgende Form:



Hier sieht man auch erneut, dass G die Kapazitätsgrenze der Population darstellt.

2. **Chemische Reaktionen 1. Ordnung**
In einer wässriger Lösung von D-Glucose bildet sich ein Gleichgewicht der Anomere α-D-Glucose und β-D-Glucose *('Mutarotation')*, entsprechend der Gleichung:

$$\alpha\text{-D-Glucose} \rightleftharpoons \beta\text{-D-Glucose}.$$

Die Konzentrationen der einzelnen Anomere bezeichnen wir mit c_α und c_β. Wir gehen davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ nur α-D-Glucose in der Lösung vorliegt, $c_\alpha(0) = c_{0,\alpha} > 0$ und $c_\beta(0) = 0$. Für die Reaktion gilt:

$$-\frac{d}{dt}c_\alpha(t) = \lambda_+ c_\alpha(t) - \lambda_- c_\beta(t),$$
$$c_{0,\alpha} = c_\alpha(t) + c_\beta(t).$$

(i) Ermitteln Sie $c_\alpha(t)$ und $c_\beta(t)$ unter den gegebenen Anfangsbedingungen.

(ii) Finden Sie die Gleichgewichtskonzentrationen $c_{\alpha,GG} = \lim_{t\to\infty} c_\alpha(t)$ und $c_{\beta,GG} = \lim_{t\to\infty} c_\beta(t)$, sowie die Halbwertszeit T_H mit $c_\beta(T_H) = \frac{1}{2}c_{\beta,GG}$.

(iii) Bei Raumtemperatur liegen im Gleichgewicht etwa 63.5% β-D-Glucose und 36.5% α-D-Glucose vor. Weiterhin kann man durch polarimetrische Messungen bestimmen, dass $T_H \simeq 150$ min ist. Bestimmen Sie daraus die Werte von λ_- und λ_+.

Lösung:

(i) Wir setzen die zweite Gleichung in die erste ein und erhalten das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt}c_\alpha(t) = -(\lambda_+ + \lambda_-)c_\alpha(t) + \lambda_- c_{0,\alpha}, \qquad c_\alpha(0) = c_{0,\alpha}.$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet bekanntermaßen

$$c_{\alpha,h}(t) = K\exp(-(\lambda_+ + \lambda_-)t), \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung machen wir den Ansatz $c_\alpha(t) = A = \text{const.}$, welcher auf

$$0 = -(\lambda_+ + \lambda_-)A + \lambda_- c_{0,\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{\lambda_- c_{0,\alpha}}{\lambda_+ + \lambda_-}$$

führt und somit zur allgemeinen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$c_\alpha(t) = K\exp(-(\lambda_+ + \lambda_-)t) + \frac{\lambda_- c_{0,\alpha}}{\lambda_+ + \lambda_-}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir schließlich noch $c_\alpha(0) = c_{0,\alpha}$, so ergibt sich $K = c_{0,\alpha} - \frac{\lambda_- c_{0,\alpha}}{\lambda_+ + \lambda_-} = \frac{\lambda_+ c_{0,\alpha}}{\lambda_+ + \lambda_-}$, also lautet die Lösung des Anfangswertproblems für $c_\alpha(t)$:

$$c_\alpha(t) = \frac{\lambda_- + \lambda_+\exp(-(\lambda_+ + \lambda_-)t)}{\lambda_+ + \lambda_-} c_{0,\alpha}.$$

Wegen $c_\beta(t) = c_{0,\alpha} - c_\alpha(t)$ ergibt sich also

$$c_\beta(t) = \frac{\lambda_+(1 - \exp(-(\lambda_+ + \lambda_-)t)}{\lambda_+ + \lambda_-} c_{0,\alpha}.$$

(ii)

$$c_{\alpha,GG} = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_- + \lambda_+ \overbrace{\exp(-(\lambda_+ + \lambda_-)t)}^{\to 0}}{\lambda_+ + \lambda_-} c_{0,\alpha} = \frac{\lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-} c_{0,\alpha},$$

$$c_{\beta,GG} = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_+(1 - \overbrace{\exp(-(\lambda_+ + \lambda_-)t)}^{\to 0})}{\lambda_+ + \lambda_-} c_{0,\alpha} = \frac{\lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_-} c_{0,\alpha}.$$

Für die Halbwertszeit T_H lösen wir:

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda_+}{\lambda_+ + \lambda_-} c_{0,\alpha} = c_\beta(T_H) = \frac{\lambda_+(1 - \exp(-(\lambda_+ + \lambda_-)T_H)}{\lambda_+ + \lambda_-} c_{0,\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad T_H = \frac{\ln(2)}{\lambda_+ + \lambda_-}.$$

(iii) Es ist $\frac{c_{\beta,GG}}{c_{\alpha,GG}} = \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \simeq 1.74$, also $\lambda_+ = 1.74\lambda_-$. Weiterhin ist

$$\lambda_+ + \lambda_- = 2.74\lambda_- = \frac{\ln(2)}{T_H} = \frac{\ln(2)}{150 \cdot 60\text{s}} \simeq 7.7 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}.$$

Damit ergeben sich $\lambda_- \simeq 2.8 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$ und $\lambda_+ \simeq 4.9 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$.

3. **Trigonometrische Funktionen**

(a) Weisen Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten nach:

(i) $\cos^3(x) = \frac{1}{4}(3\cos(x) + \cos(3x))$

(ii) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(iii) $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

Hinweis: Verwenden Sie: $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ und $\sin(\alpha) = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$.

(b) Berechnen Sie folgende Integrale:

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) (i) Wir setzen $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^3}{8} = \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{i\cdot 3x}+e^{-i\cdot 3x}}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(3\cos(x)+\cos(3x)\right).
\end{aligned}$$

(ii) Analog setzen wir die Formeln für $\cos(x)$ und $\sin(x)$ ein:

$$\begin{aligned}
\sin^2(x)+\cos^2(x) &= \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^2}{4} - \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^2}{4} \\
&= \frac{1}{4}(e^{2ix}+2+e^{-2ix}-e^{2ix}+2-e^{-2ix}) = 1.
\end{aligned}$$

(iii) Hier haben wir:

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos(y) &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \\
&= \frac{1}{4i}(e^{i(x+y)}+e^{i(x-y)}-e^{-i(x-y)}-e^{-i(x+y)}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(x+y)}-e^{-i(x+y)}}{2i}+\frac{e^{i(x-y)}-e^{-i(x-y)}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right).
\end{aligned}$$

(b) (i) Wir benutzen die Formel aus (a), (i):

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx &= \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(3x)dx \\
&= \frac{3}{4}\left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{12}\left[\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(ii) Hier benutzen wir die Formel aus (a), (iii):

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\cos(nx)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin((m-n)x)+\sin((m+n)x)dx \\
&= \left[\frac{1}{2(m-n)}\cos((m-n)x)+\frac{1}{2(m+n)}\cos((m+n)x)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,
\end{aligned}$$

da $\cos(k\pi) = \cos(-k\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$. (Beachte: Die Integrale sind nur dann ausführbar, falls $m \neq n$ bzw. $m \neq -n$. Andernfalls ist aber $\sin(0) = 0$.)

4. **Periodische Funktionen**
Betrachten Sie die Funktion f, gegeben auf dem Intervall $[0, \pi]$, mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie eine *gerade*, 2π-periodische Funktion f_g auf $\mathbb{R}$, die mit f auf $[0,\pi]$ übereinstimmt. Man nennt f_g die *gerade, 2π-periodische Fortsetzung* von f.

(b) Skizzieren Sie f_g im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.

(c) Sei nun h eine beliebige, P-periodische Funktion, wobei $P > 0$. Beweisen Sie, dass für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_c^{c+P} h(x)dx = \int_{-P/2}^{P/2} h(x)dx.$$

Mit anderen Worten: *Das Integral einer periodischen Funktion über eine Periode hängt nicht vom Startwert ab.*

(d) Benutzen Sie Teil (c), um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_{4\pi}^{10\pi} f_g^2(x)dx.$$

Lösung:

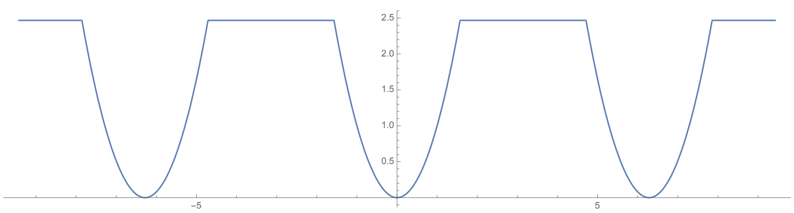
(a) Zunächst setzen wir die Funktion *gerade* fort, indem wir fordern, dass $f_g(-x) = f_g(x) = f(x)$ für $x \in [0,\pi]$ gilt. Damit haben wir auf $[-\pi,\pi]$:

$$f_g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4}, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi, \\ (-x)^2, & -\frac{\pi}{2} \le x \le 0, \\ \frac{\pi^2}{4}, & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2}. \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi^2}{4}, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Damit die Funktion auch 2π-periodisch wird, muss folgendes gelten: $f_g(x) = f_g(x+2\pi m)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$, also *definieren* wir $f_g(z)$ für $z \in [2m\pi - \pi, 2m\pi + \pi]$ durch $f_g(x)$ sodass $z = x + 2\pi m$, das heißt, $f_g(x) := f_g(z - 2\pi m)$. Es ergibt sich schließlich:

$$f_g(x) = \begin{cases} (x - 2\pi m)^2, & x \in [2m\pi - \frac{\pi}{2}, 2m\pi + \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi^2}{4}, & x \in [2m\pi - \pi, 2m\pi - \frac{\pi}{2}) \cup (2m\pi + \frac{\pi}{2}, 2m\pi + \pi] \end{cases}$$

(b)



(c) Wir zeigen, dass für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_c^{c+P} h(x)\,dx = \int_0^P h(x)\,dx. \qquad (*)$$

Wenn $c = 0$, dann stimmen die zwei Integrale überein. Wenn $c > 0$ dann erhalten wir mit der Substitution $y = x + P$:

$$\int_c^{c+P} h(x)\,dx = \int_0^{c+P} h(x)\,dx - \int_0^c h(x)\,dx = \int_0^P h(x)\,dx + \int_P^{c+P} h(x)\,dx - \int_0^c h(x)\,dx$$
$$= \int_0^P h(x)\,dx.$$

Wenn $c < 0$, dann haben wir

$$\int_c^{c+P} h(x)\,dx \overset{y=-x+P}{=} \int_{-c}^{-c+P} h(-y)\,dy = \int_0^P h(-y)\,dy \overset{x=-y+P}{=} \int_0^P h(x)\,dx,$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen den Fall $c > 0$ verwendeten und dass $x \mapsto h(-x)$ eine $P-$periodische Funktion ist. Insbesondere gilt Gleichung $(*)$ für $c = -P/2$ und somit folgt

$$\int_c^{c+P} h(x)\,dx = \int_0^P h(x)\,dx = \int_{-P/2}^{P/2} h(x)\,dx$$

für alle $c \in \mathbb{R}$, wie gewünscht.

(d) Wir bemerken, dass f_g^2 eine $2\pi-$periodische, gerade Funktion ist und damit gilt:

$$\begin{aligned}\int_{4\pi}^{10\pi} f_g^2(x)dx &= \int_{4\pi}^{6\pi} f_g^2(x)dx + \int_{6\pi}^{8\pi} f_g^2(x)dx + \int_{8\pi}^{10\pi} f_g^2(x)dx \\ &\overset{(c)}{=} 3\int_{-\pi}^{\pi} f_g^2(x)dx = 6\left(\int_0^{\pi/2} x^4 dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi^4}{16}dx\right) \\ &= \frac{6}{5}\left[x^5\right]_0^{\pi/2} + \frac{6}{16}\frac{\pi^5}{2} = \frac{9\pi^5}{40}.\end{aligned}$$

Alternative Lösung für 4.(c): Es gilt für $c < -P/2$:

$$\int_c^{c+P} h(x)dx + \underbrace{\int_{c+P}^{P/2} h(x)dx}_{=A} = \underbrace{\int_c^{-P/2} h(x)dx}_{=B} + \int_{-P/2}^{P/2} h(x)dx,$$

wobei wir die Zerlegungen $[c, P/2] = [c, c+P) \cup [c+P, c/P]$ und $[c, P/2] = [c, -P/2) \cup [-P/2, P/2]$ vorgenommen haben. Nun substituieren wir in B: $z = x + P$, $dz = dx$, also

$$B = \int_c^{-P/2} h(x)dx = \int_{c+P}^{P/2} \underbrace{h(z-P)}_{h(z)}\,dz = A,$$

somit folgt die behauptete Gleichung (für $c > P/2$ folgt die Gleichung aus einer ähnlichen Zerlegung).