Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Musterlösung zu Serie 1

1. **Reelle Fourierreihen**
   Bestimmen Sie die trigonometrischen Koeffizienten a_n, b_n der Fourier-Reihe mit Periode T zu den folgenden Funktionen f, g, h:

   (i) $f(x) = \cos(x/2), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad T = 2\pi$
   (ii) $g(x) = 1 - e^{-x/2}, \quad x \in [0, 2[, \quad T = 2$
   (iii) $h(x) = 1 - e^{-2\pi x}, \quad x \in [0, 1[, \quad T = 1$

   Lösung:

   (i) Version I: Es ist $b_n = 0$, da $x \mapsto \cos(x/2)$ gerade ist. Für a_n verwenden wir

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

   und rechnen

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)\cos(nx)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+\tfrac{1}{2})x) + \cos((n-\tfrac{1}{2})x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sin((n+\tfrac{1}{2})x) + \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\sin((n-\tfrac{1}{2})x)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n+\frac{1}{2}}\sin((n+\tfrac{1}{2})\pi) + \frac{2}{n-\frac{1}{2}}\sin((n-\tfrac{1}{2})\pi)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} - \frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}} = \frac{4(-1)^n}{1-4n^2}.
\end{aligned}$$

   Also $a_n = \dfrac{4(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}$.
   Version II:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)e^{-inx}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-ix/2} + e^{ix/2})e^{-inx}dz \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-i(n+\frac{1}{2})}e^{-ix/2}e^{-inx} + \frac{1}{-i(n-\frac{1}{2})}e^{ix/2}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{-i-i}{-i(n+\frac{1}{2})} + \frac{i-(-i)}{-i(n-\frac{1}{2})}\right) \\
&= (-1)^n\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) = \frac{4(-1)^n}{1-4n^2}.
\end{aligned}$$

   Also $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{4(-1)^n}{1-4n^2} = \dfrac{2(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}$. Dann berechnet sich a_n mittels folgender Formeln:

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}$$

   Da hier $c_n = c_{-n}$ gilt $a_n = 2c_n = \frac{4(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}$ und $b_n = i(c_n - c_{-n}) = 0$.

Version III: $c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot I$, wobei

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2) e^{-inx} dx \\
&= \left[2\sin(x/2)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2in \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x/2) e^{-inx} dx \\
&= 2((-1)^n + (-1)^n) + \left[-4in\cos(x/2)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - 4i^2n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)e^{-inx} dx \\
&= 4(-1)^n + 4n^2 I
\end{aligned}$$

da $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(-\pi/2) = -1$, $\cos(\pm\pi/2) = 0$, $e^{-in\pi} = (-1)^n$ und $i^2 = -1$. Also $I = \frac{4(-1)^n}{1-4n^2}$ und wieder $c_n = \frac{2(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}$.

(ii) Die Fourier-Reihe als Projektion ist linear, das heisst, $FR(g_1 + g_2) = FR(g_1) + FR(g_2)$. Daher berechnen wir separat für $g_1(x) = 1$ und $g_2(x) = -e^{-x/2}$. $FR(g_1) = 1e^0$, also $c_0^{(1)} = 1$. Um die Koeffizienten von $FR(g_2)$ zu bestimmen, berechnen wir

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{T} \int_0^T g_2(x) e^{-\frac{2i\pi}{T}nx} dx.$$

Für $T = 2$ also

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^2 (-e^{-x/2}) e^{-i\pi nx} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{1+2i\pi n} e^{-(1+2i\pi n)x/2}\right]_0^2 = \frac{e^{-1}-1}{1+2i\pi n},$$

weil $e^{-2i\pi n} = 1$. Mit $c_n = c_n^{(1)} + c_n^{(2)}$ erhalten wir $c_n = \frac{e^{-1}-1}{1+2i\pi n}$ und $c_0 = e^{-1}$. Berechne a_n, b_n wieder mit

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

(iii) Analog zu oben, $T = 1$, $c_0^{(1)} = 1$ und

$$c_n^{(2)} = \int_0^1 (-e^{-2\pi x}) e^{-2i\pi nx} dx = \frac{1}{2\pi(1+in)} \left[e^{-2\pi(1+in)x}\right]_0^1 = \frac{e^{-2\pi}-1}{2\pi(1+in)},$$

also $c_n = \frac{e^{-2\pi}-1}{2\pi(1+in)}$ und $c_0 = \frac{e^{-2\pi}-1}{2\pi} + 1$.

2. **Konvergenz von reellen Fourierreihen**
Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Fourierreihen der folgenden Funktionen konvergieren und falls ja, ob sie die jeweilige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ darstellen. Was geschieht an den Unstetigkeitsstellen?

(i) $f(x) = x^4 - 2\pi^2 x^2$ auf $[-\pi, \pi[$, periodisch fortgesetzt nach $\mathbb{R}$

(ii) $g(x) = 2\left(\frac{x}{\pi} - \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)$ auf $\mathbb{R}$, wobei $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \colon k \le x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 1.5 und Korollar 1.6 aus dem Skript.

Lösung: f und g erfüllen alle die Dirichlet-Bedingungen aus Satz 1.5: Beachte, dass g dargestellt werden kann als

$$g(x) = 2\frac{x}{\pi} \text{ auf } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \pi\text{-periodisch fortgesetzt nach } \mathbb{R}.$$

Insbesondere sind beide Funktionen 2π-periodisch, absolut integrierbar über eine Periode und besitzen eine endliche Anzahl von Extrema und Unstetigkeitsstellen in jedem beliebigen (endlichen) Intervall, d.h. die Fourierreihen von f, g konvergieren alle.

Weiterhin ist f stetig auf $\mathbb{R}$, insbesondere stellt die Fourierreihe von f gemäss Korollar 1.6 diese Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ dar.

g hat Unstetigkeitsstellen bei $x \in (1+2\mathbb{Z})\frac{\pi}{2} = \{..., -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...\}$, und dort konvergiert die Fourierreihe nach 0 (arithmetisches Mittel von -1 und 1).

3. **Reihenwerte und Fourierreihen**
Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = x^3 - \pi^2 x$, $x \in [-\pi, \pi]$, 2π-periodisch fortgesetzt nach $\mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(ii) Begründen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ durch seine Fourierreihe dargestellt wird, das bedeutet:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

(iii) Berechnen Sie mithilfe von (i) und (ii) den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Lösung:

(i) Zunächst ist die Funktion f ungerade, also ist $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^3 - \pi^2 x)\sin(nx)dx = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^3\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} 3x^2\cos(nx)dx \\
&+ 2\pi\left[\frac{1}{n}\cos(nx)x\right]_0^{\pi} - \frac{2\pi}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx \\
&= -\frac{2\pi^2}{n}\cos(n\pi) + \underbrace{\frac{2}{\pi n}0^3\cdot\cos(n\cdot 0)}_{=0} + \frac{6}{n\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx \\
&+ \frac{2\pi^2}{n}\cos(n\pi) - \underbrace{\frac{2\pi}{n}\cos(n\cdot 0)\cdot 0}_{=0} - \frac{2\pi}{n}\underbrace{\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} \\
&= \frac{6}{\pi n}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{6}{\pi n}\underbrace{\left[\frac{1}{n}x^2\sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{6}{\pi n^2}\int_0^{\pi} 2x\sin(nx)dx \\
&= \frac{12}{\pi n^2}\left[\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{12}{\pi n^3}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(nx)dx}_{=0} = \frac{12(-1)^n}{n^3}.
\end{aligned}$$

(ii) Auf $[-\pi, \pi]$
- ist f absolut integrierbar,
- hat f endlich viele Extrema

– ist f stetig.

Damit können wir Satz 1.5 aus dem Skript anwenden (Dirichlet-Bedingung) und sehen, dass die Funktion f an allen Stetigkeitsstellen durch ihre Fourierreihe dargestellt wird. Ausserdem ist $f(-\pi) = 0 = f(\pi)$. Damit ist f überall stetig und wird somit auch überall durch ihre Fourierreihe dargestellt (Korollar 1.6 aus dem Skript).

(iii) Aus (i) und (ii) erhalten wir für $x \in [-\pi, \pi]$:

$$x^3 - \pi^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^3} \sin(nx).$$

Wir setzen auf beiden Seiten $x = \frac{\pi}{2}$ ein und benutzen, dass

$$\sin(n\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ (-1)^k, & n = 2k+1, k = 0, 1, 2... \end{cases}$$

$$\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12 \overbrace{(-1)^{2k+1}}^{=-1}}{(2k+1)^3}(-1)^k \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

4. **Parseval-Identität**

Für eine auf $[-\pi, \pi]$ definierte, stückweise stetige Funktion f definieren wir die L^2-*Norm*:

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx}.$$

Für die reellen Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Fortsetzung von f, $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, gilt die sogenannte *Parseval-Identität*:

$$\frac{1}{\pi}\|f\|_{L^2}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

(i) Berechnen Sie die L^2-Norm der Funktion f mit $f(x) = x^2$ auf $[-\pi, \pi]$.

(ii) Benutzen Sie die Parseval-Identität, um nachzuweisen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Lösung:

(i) Es gilt: $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx} = \sqrt{\frac{2}{5}[x^5]_0^{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{5}\pi^5}$.

(ii) Zuerst berechnen wir die Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Fortsetzung von $x \mapsto x^2, x \in [-\pi, \pi]$ nach $\mathbb{R}$, welche wir mit f_1 bezeichnen. Die Funktion f_1 ist gerade, damit ist $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\cos(nx)dx\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[\frac{x^2}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{4\pi}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx\\
&= \frac{4}{\pi n}\left[\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\\
&= \frac{4}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{4}{\pi n^3}\underbrace{[\sin(nx)]_0^{\pi}}_{=0} = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \qquad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Aus der Parseval-Identität folgt also:

$$\frac{1}{\pi}\frac{2\pi^5}{5} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\right)^2 = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5. (∗) **Beispiel eines Funktionenraumes mit Skalarprodukt**
Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $C^1([-1,1])$ der auf $[-1,1]$ stetig differenzierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

   (i) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{P}_{\leq 2}$ der Polynome vom Grad ≤ 2 einen endlichdimensionalen Untervektorraum von $C^1([-1,1])$ mit Basis $\{f_1, f_2, f_3\}$ bildet, wobei $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ und $f_3(x) = x^2$.

   (ii) Begründen Sie, dass $\{f_1, f_2, f_3\}$ *keine* Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_{\leq 2}$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist, und finden Sie $h \in \mathcal{P}_{\leq 2}$, sodass $\{f_1, f_2, h\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_{\leq 2}$ bildet.
   Hinweis: Schreiben Sie $H(x) = Ax^2 + Bx + C$ und bestimmen Sie $A, B, C \in \mathbb{R}$, sodass $\langle f_1, H\rangle = \langle f_2, H\rangle = 0$ und normieren Sie H entsprechend.

   (iii) Zeigen Sie, dass $\langle g, u\rangle = 0$ gilt, falls g eine gerade und u eine ungerade Funktion ist.

Lösung:

   (i) Zunächst gilt $\mathcal{P}_{\leq 2} \subseteq C^1([-1,1])$, da alle Polynome vom Grad ≤ 2 beliebig oft differenzierbar sind. Nun zeigen wir, dass $\mathcal{P}_{\leq 2}$ abgeschlossen bezüglich Skalarmultiplikation und Vektoraddition ist:
   Seien $f, g \in \mathcal{P}_{\leq 2}$, $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda f(x) + \mu g(x)\\
&= \lambda(a_1x^2 + b_1x + c_1) + \mu(a_2x^2 + b_2x + c_2)\\
&= (\lambda a_1 + \mu a_2)x^2 + (\lambda b_1 + \mu b_2)x + (\lambda c_1 + \mu c_2)
\end{aligned}$$

   Also gilt $\lambda f + \mu g \in \mathcal{P}_{\leq 2}$. und damit ist $\mathcal{P}_{\leq 2}$ ein Untervektorraum von $C^1([-1,1])$.

   Wir zeigen nun, dass $\{f_1, f_2, f_3\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_{\leq 2}$ ist:
   – $\{f_1, f_2, f_3\}$ ist ein *Erzeugendensystem*: Ist $f \in \mathcal{P}_{\leq 2}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, dann ist

$$f(x) = \left(\sqrt{2}c\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}b\right)\sqrt{\frac{3}{2}}x + x^2 \quad\Rightarrow\quad f = \sqrt{2}cf_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}bf_2 + f_3.$$

– $\{f_1, f_2, f_3\}$ ist *linear unabhängig*: Angenommen, für $\lambda, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$ gelte $\lambda f_1 + \mu f_2 + \sigma f_3 = 0$. Dann ist

$$\lambda f_1(0) + \mu f_2(0) + \sigma f_3(0) = \lambda \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \ (\Rightarrow \lambda = 0),$$
$$\lambda f_1(1) + \mu f_2(1) + \sigma f_3(1) = \sqrt{\frac{3}{2}}\mu + \sigma = 0,$$
$$\lambda f_1\left(\frac{1}{2}\right) + \mu f_2\left(\frac{1}{2}\right) + \sigma f_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\mu + \frac{1}{4}\sigma = 0.$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt demnach auch $\mu = \sigma = 0$.

(ii) $\{f_1, f_2, f_3\}$ ist keine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_{\leq 2}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$, denn

$$\langle f_1, f_3 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{3} \neq 0.$$

Sei nun $H(x) = Ax^2 + Bx + C$, $A, B, C \in \mathbb{R}$, mit $\langle f_1, H \rangle = \langle f_2, H \rangle$, also

$$0 = \langle f_1, H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx = \frac{1}{3\sqrt{2}} A \left[x^3\right]_{-1}^{1} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} C = \frac{1}{3}\sqrt{2}A + \sqrt{2}C,$$
$$0 = \langle f_2, H \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right) dx = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} B \left[x^3\right]_{-1}^{1} = \sqrt{\frac{2}{3}} B.$$

Also gilt $B = 0$. Wir wählen $A = 3$, daraus folgt $C = -1$, d.h. $H(x) = 3x^2 - 1$. Schließlich normieren wir H:

$$h = \frac{H}{\sqrt{\langle H, H \rangle}} = \left(\int_{-1}^{1} (3x^2 - 1)^2 dx\right)^{-\frac{1}{2}} H = \sqrt{\frac{5}{8}} H,$$

also ist $h(x) = 3\sqrt{\frac{5}{8}}x^2 - \sqrt{\frac{5}{8}}$ eine geeignete Wahl. Ferner gilt:

$$\langle f_1, f_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 dx = 1, \qquad \langle f_2, f_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = 1.$$

(iii) Sei g gerade, d.h. $g(-x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und u ungerade, d.h. $u(-x) = -u(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle g, u \rangle &= \int_{-1}^{1} g(x)u(x)dx = \int_{0}^{1} g(x)u(x)dx + \int_{-1}^{0} g(x)u(x)dx \\ &= \int_{0}^{1} g(x)u(x)dx + \int_{1}^{0} \underbrace{g(-y)}_{=g(y)} \underbrace{u(-y)}_{=-u(y)} (-dy) \\ &= \int_{0}^{1} g(x)u(x)dx - \int_{0}^{1} g(y)u(y)dy = 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $y = -x$ verwendet haben, sowie $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Beachte: Mit demselben Argument kann man zeigen, dass für jede ungerade Funktion u und jedes symmetrische Intervall $[-a, a]$, $a > 0$ gilt, dass

$$\int_{-a}^{a} u(x)dx = 0.$$