Musterlösung zu Serie 10

1) ***Multiple Choice Aufgaben***
Kreuzen Sie die richtige Aussagen an.

(a) *Die Laplace-Transformierte von* $f(t) = \sqrt{t}$ *ist* $F(s) = \frac{\pi^{1/2}}{2s^{3/2}}$. *Was ist die Laplace-Transformierte von* $g(t) = t^{5/2}$*?*

☐ $G(s) = \frac{\pi^{5/2}}{2s^{7/2}}$
☐ $G(s) = \frac{15}{4}\frac{\pi^{1/2}}{s^{5/2}}$
☐ $G(s) = \frac{2\pi^{1/2}}{s^{3+1/2}}$
☑ $G(s) = \frac{15}{8}\frac{\pi^{1/2}}{s^{7/2}}$

(b) *Die inverse Laplace-Transformierte von* $F(s) = \frac{1}{s^2+4s+20}$ *ist*

☐ $(e^t - e^{-5t})/6$
☑ $e^{-2t}\sin(4t)/4$
☐ $(e^t + e^{5t})/6$
☐ $e^{-2t}\cos(4t)/4$

(c) *Betrachten Sie das Anfangswertproblem*

$$\dot{x}(t) + x(t) = t, \quad x(0) = 1$$

und entscheiden Sie welche Aussagen zutreffen

☑ $x(t) = -1 + t + 2e^{-t}$
☐ $X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1}$
☐ $x(t) = 1 + t + e^{-t}$
☑ $X(s) = \frac{s^2+1}{s^2(1+s)}$

Hier bezeichnet $X(s)$ *die Laplace-Transformierte von* $x(t)$.

2) ***Differentialgleichung zweiter Ordnung***
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - x(t) = e^t, \\ x(0) = \dot{x}(0) = 1, \end{cases}$$

indem Sie das Laplace-transformierte Problem betrachten.

Lösung: Wir bezeichnen mit $X(s)$ die Laplacetransformierte von $x(t)$. Wenden wir die Laplacetransformation auf das gegebene Anfangswertproblem an, dann folgt mit der Ableitungsregel, dass gilt

$$\mathcal{L}[\ddot{x}(t) - x(t)](s) = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) - X(s) = s^2X(s) - s - 1 - X(s)$$

und damit folgt

$$(s^2 - 1)X(s) - s - 1 = \frac{1}{s-1},$$

wobei wir Tabelle 1 aus dem Vorlesungsskript verwendeten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+1}{s^2-1} + \frac{1}{(s^2-1)(s-1)} = \frac{s+1}{(s-1)(s+1)} + \frac{1}{(s+1)(s-1)^2} \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s+1)(s-1)^2}. \end{aligned}$$

Für den letzten Term machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{(s+1)(s-1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1},$$

wobei $A, B, C \in \mathbb{R}$ noch zu bestimmende Konstanten sind. Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Hauptnenner, dann folgt

$$\begin{aligned} 1 &= A(s^2-1) + B(s+1) + C(s-1)^2 \\ &= As^2 - A + Bs + B + Cs^2 - 2sC + C \\ &= (A+C)s^2 + (B-2C)s + (-A+B+C). \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$A + C = 0, \quad B - 2C = 0, \quad -A + B + C = 1.$$

Es folgt

$$A = -C, \quad B = 2C, \quad 1 = -A + B + C = C + 2C + C = 4C$$

und damit folgt $C = 1/4, B = 1/2, A = -1/4$. Dies zeigt, dass die Partialbruchzerlegung gegeben ist durch

$$\frac{1}{(s+1)(s-1)^2} = -\frac{1}{4(s-1)} + \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{1}{4(s+1)}.$$

Es gilt

$$X(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{4(s-1)} + \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{1}{4(s+1)} = \frac{3}{4(s-1)} + \frac{1}{4(s+1)} + \frac{1}{2(s-1)^2}$$

und somit ist $x(t)$ gegeben durch

$$x(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{t}{2}e^t,$$

wobei wir für den letzten Term den Verschiebungssatz verwendet haben.

3) **Differentialgleichung vierter Ordnung**
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) - x(t) = 4e^t, \\ x(0) = 9, \dot{x}(0) = 5, \ddot{x}(0) = 3, x^{(3)}(0) = -3 \end{cases}$$

indem Sie das Laplacetransformierte Problem betrachten, wobei wir mit $x^{(3)}, x^{(4)}$ die 3te und 4te Ableitung bezeichnen.

Lösung: Wir bezeichnen mit $X(s)$ die Laplacetransformierte von $x(t)$. Wenden wir die Laplacetransformation auf das gegebene Anfangswertproblem an, dann folgt mit der Ableitungsregel, dass gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^{(4)}(t) - x(t)](s) &= s^4 X(s) - s^3 x(0) - s^2 \dot{x}(0) - s\ddot{x}(0) - x^{(3)}(0) - X(s) \\ &= (s^4-1)X(s) - 9s^3 - 5s^2 - 3s + 3 \end{aligned}$$

Mit der Identität $\mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s^4-1}\left(\frac{4}{s-1} + 9s^3 + 5s^2 + 3s - 3\right) \\
&= \frac{4 + (9s^3 + 5s^2 + 3s - 3)(s-1)}{(s-1)(s^4-1)} \\
&= \frac{4 + 9s^4 + 5s^3 + 3s^2 - 3s - 9s^3 - 5s^2 - 3s + 3}{(s-1)(s^4-1)} \\
&= \frac{9s^4 - 4s^3 - 2s^2 - 6s + 7}{(s-1)(s^4-1)} = \frac{9s^4 - 4s^3 - 2s^2 - 6s + 7}{(s-1)(s+1)(s-1)(s^2+1)} \\
&= \frac{9s^4 - 4s^3 - 2s^2 - 6s + 7}{(s-1)^2(s+1)(s^2+1)}.
\end{aligned}$$

Da $s = 1$ eine doppelte Nullstelle des Nenners ist und $s^2 + 1$ keine reellen Nullstellen hat, machen wir den Ansatz

$$\frac{9s^4 - 4s^3 - 2s^2 - 6s + 7}{(s-1)^2(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{Ds+E}{s^2+1} \tag{1}$$

für noch zu bestimmende Koeffizienten $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Hauptnenner, dann folgt

$$\begin{aligned}
9s^4 - 4s^3 - 2s^2 - 6s + 7 =& A(s-1)(s+1)(s^2+1) + B(s-1)^2(s^2+1) \\
&+ C(s+1)(s^2+1) + (Ds+E)(s+1)(s-1)^2 \\
=& A(s^2-1)(s^2+1) + B(s^2-2s+1)(s^2+1) \\
&+ C(s^3+s^2+s+1) + (Ds+E)(s+1)(s^2-2s+1) \\
=& A(s^4-1) + B(s^4-2s^3+2s^2-2s+1) \\
&+ C(s^3+s^2+s+1) + (Ds+E)(s^3-s^2-s+1) \\
=& A(s^4-1) + B(s^4-2s^3+2s^2-2s+1) \\
&+ C(s^3+s^2+s+1) + D(s^4-s^3-s^2+s) \\
&+ E(s^3-s^2-s+1) \\
=& (A+B+D)s^4 + (-2B+C-D+E)s^3 \\
&+ (2B+C-D-E)s^2 + (-2B+C+D-E)s \\
&+ (-A+B+C+1).
\end{aligned}$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauss-Algorithmus findet man

$$A = -3 + 2C + B, \quad D = 12 - 2C - 2B, \quad E = 4 + C.$$

Also müssen wir nur noch die Koeffizienten B und C bestimmen. Aus Gleichung (1) sehen wir

$$\begin{aligned} B &= \lim_{s\to -1}(s+1)\left(\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s-1)^2}+\frac{Ds+E}{s^2+1}\right) \\ &= \lim_{s\to -1}(s+1)\frac{9s^4-4s^3-2s^2-6s+7}{(s-1)^2(s+1)(s^2+1)} \\ \lim_{s\to -1}&\frac{9s^4-4s^3-2s^2-6s+7}{(s-1)^2(s^2+1)} = \frac{9+4-2+6+7}{4\cdot 2} = \frac{24}{8} = 3. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} C &= \lim_{s\to 1}(s-1)^2\left(\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s-1)^2}+\frac{Ds+E}{s^2+1}\right) \\ &= \lim_{s\to 1}(s-1)^2\frac{9s^4-4s^3-2s^2-6s+7}{(s-1)^2(s+1)(s^2+1)} \\ \lim_{s\to 1}&\frac{9s^4-4s^3-2s^2-6s+7}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{9-4-2-6+7}{2\cdot 2} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

Es folgt

$$A=2, \quad D=4, \quad E=5$$

und damit ist die Partialbruchzerlegung gegeben durch

$$X(s) = \frac{2}{s-1}+\frac{3}{s+1}+\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{4s}{s^2+1}+\frac{5}{s^2+1}.$$

Es folgt wieder aus Resultaten der Vorlesung und der zweiten Ableitungsregel, dass gilt

$$x(t) = 2e^t + 3e^{-t} + te^t + 4\cos(t) + 5\sin(t).$$

4) ***Integralgleichungen***
Bestimmen Sie mithilfe der Laplacetransformation die Lösung $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *folgender Integralgleichungen:*

(a) $x(t) = \cos(t) + \int_0^t x(u)\,du$

(b) $6x(t) = 2t^3 + \int_0^t x(u)(t-u)^3\,du$

(c) $t\sin(t) = \int_0^t x(u)\sin(t-u)\,du$

Lösung:

(a) Mit $y(t)=1$ für $t\geq 0$ gilt

$$x(t) = \cos(t) + \int_0^t x(u)\,du = \cos(t) + \int_0^t y(t-u)x(u)\,du = \cos(t) + (y*x)(t).$$

Mit der Linearität der Laplacetransformation und dem Faltungssatz erhalten wir

$$X(s) = \mathcal{L}[\cos(t)](s) + X(s)Y(s),$$

wobei wir $X(s)=\mathcal{L}[x](s)$, $Y(s)=\mathcal{L}[y](s)$ gesetzt haben. Aus der Vorlesung wissen wir

$$X(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{X(s)}{s}$$

und damit erhalten wir

$$X(s) = \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)}.$$

Wir machen nun den Ansatz

$$\frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

für noch zu bestimmende Konstanten $A, B, C \in \mathbb{R}$, weil s^2+1 keine reellen Nullstellen hat. Multiplizieren wir die erhaltene Gleichung mit dem Hauptnenner, dann folgt

$$\begin{aligned} s^2 &= A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1) = As^2 + A + Bs^2 - Bs + Cs - C \\ &= (A+B)s^2 + (C-B)s + A - C. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A = C = B = 1/2$ und damit folgt

$$X(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right).$$

Also erhalten wir

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + \cos(t) + \sin(t)\right).$$

(b) Wie in Teilaufgabe a) erhalten wir mit der Linearität der Laplacetransformation und dem Faltungssatz die Identität

$$6X(s) = 2\mathcal{L}[t^3](s) + X(s)\mathcal{L}[t^3](s) = \frac{12}{s^4} + 6\frac{X(s)}{s^4},$$

wobei wir wieder $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$ gesetzt haben und $\mathcal{L}[t^n](s) = n!/s^{n+1}$ verwendeten. Auflösen nach $X(s)$ liefert

$$X(s) = \frac{2}{s^4-1} = \frac{2}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}.$$

Wir machen den Ansatz

$$\frac{2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

für noch zu bestimmende Konstanten $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, weil s^2+1 keine reellen Nullstellen hat. Multiplizieren wir die erhaltene Gleichung mit dem Hauptnenner, dann folgt

$$\begin{aligned} 2 &= A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2-1) \\ &= As^3 + As^2 + As + A + Bs^3 - Bs^2 + Bs - B + Cs^3 + Ds^2 - Cs - D \\ &= (A+B+C)s^3 + (A-B+D)s^2 + (A+B-C)s + A - B - D \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit einem geeigneten Lösungsverfahren findet man

$$A = \frac{1}{2},\ B = -A = -\frac{1}{2},\ D = -A + B = -2A = -1,\ C = -A - B = 0$$

und damit erhalten wir

$$X(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{s^2+1}.$$

Aus Resultaten der Vorlesung erhalten wir

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) - \sin(t) = \sinh(t) - \sin(t),$$

wobei wir $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ benutzt haben.

(c) Wie in den Teilaufgaben a), b) erhalten wir mit der Linearität der Laplacetransformation, dem Faltungssatz und der zweiten Ableitungsregel die Identität

$$\frac{X(s)}{s^2+1} = \mathcal{L}[t\sin(t)](s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2},$$

wobei wir wieder $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$ gesetzt haben und $\mathcal{L}[\sin(t)](s) = 1/(s^2+1)$ verwendeten. Es folgt $X(s) = 2\frac{s}{s^2+1}$ und damit

$$x(t) = 2\cos(t).$$