Musterlösung zu Serie 11

1) ***Kurzfragen und Multiple Choice Aufgaben***
Bei Kurzfragen genügt es die Antwort hinzuschreiben.

(a) *Welche Ordnung haben die folgenden partiellen Differentialgleichungen? Welche sind linear und welche sind homogen?*

(i) $u_x^2 + e^y u_{yy} = \sin(x)$,
(ii) $u_{xx} + e^{-y^2} u_y = 0$,
(iii) $u_{xxx} + \exp(u_y) + 4u_{xy} = 1/x$,
(iv) $u_{xx} - y^2 u_{yy} + 2yu_y + 2u = \cos(x)^2$,
(v) $9u_{xx} + 12u_{xy} + 2u_{yy} = 0$
(vi) $5u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 7u_x + 3u_y = \exp(-x^2)$

(b) *Sei $u(x,t)$ eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Koordinatentransformation $\xi = \xi(x,t), \eta = \eta(x,t)$, welche PDG die Funktion $v(\xi,\eta) = u(x,t)$ löst.*

(i) $\xi = 4x, \eta = 5t$:
- ☐ $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = 0$
- ☐ $4v_{\xi\xi} - 5v_{\eta\eta} = 0$
- ☐ $16v_{\xi\xi} - 40v_{\xi\eta} + 25v_{\eta\eta} = 0$
- ☑ $16v_{\xi\xi} - 25v_{\eta\eta} = 0$

(ii) $\xi = x + 3t, \eta = t$:
- ☐ $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = 0$
- ☑ $8v_{\xi\xi} + 6v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} = 0$
- ☐ $9v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = 0 = 0$
- ☐ $v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} - 9v_{\eta\eta} = 0$

(iii) $\xi = 2x, \eta = xt$:
- ☐ $\xi^2 v_{\xi\xi} - \eta^2 v_{\eta\eta} = 0$
- ☐ $-\frac{8}{3}\xi v_{\xi\xi} - 4\frac{\xi}{\eta} v_{\xi\eta} - v_{\eta\eta} = 0$
- ☐ $4v_{\xi\xi} + 4\eta^2 v_{\xi\eta} + ((2\xi)^{-2} - \eta^2) v_{\eta\eta} = 0$
- ☑ $4(v_{\xi\xi} + 2\frac{\eta}{\xi} v_{\xi\eta}) + \left(\left(\frac{2\eta}{\xi}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{2}\right)^2\right) v_{\eta\eta} = 0$

Lösung zur Teilaufgabe (a):

(i) ist eine nichtlineare, inhomogene PDG zweiter Ordnung. Nichtlinear, weil u_x^2 nichtlinear in u_x ist; inhomogen wegen des Terms $\sin(x)$; und zweiter Ordnung, weil die höchste Ableitung u_{yy} zweiter Ordnung ist.

(ii) ist eine lineare, homogene PDG zweiter Ordnung. Linear, weil die Terme u_{xx} und u_y linear auftreten; homogen, weil die rechte Seite 0 ist; und zweiter Ordnung, weil die höchste Ableitung u_{xx} zweiter Ordnung ist.

(iii) ist eine nichtlineare, inhomogene PDG dritter Ordnung. Nichtlinear, weil der Term $\exp(u_y)$ nichtlinear in u_y ist; inhomogen wegen des Terms $1/x$; und dritter Ordnung, weil die höchste Ableitung u_{xxx} dritter Ordnung ist.

(iv) ist eine lineare, inhomogene PDG zweiter Ordnung. Linear, weil die Terme u_{xx}, u_{yy}, u_y und u alle linear vorkommen; inhomogen wegen des Terms $\cos(x)^2$; und zweiter Ordnung weil die höchsten Ableitungen u_{xx} und u_{yy} zweiter Ordnung sind.

(v) ist eine lineare, homogene PDG zweiter Ordnung. Linear, weil die Terme u_{xx}, u_{xy} und u_{yy} linear vorkommen; homogen, weil die rechte Seite 0 ist; und zweiter Ordnung, weil u_{xx}, u_{xy} u_{yy} alle Ableitungen zweiter Ordnung sind.

(vi) ist eine lineare, inhomogene PDG zweiter Ordnung. Linear, weil die Terme u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x und u_y linear vorkommen; inhomogen wegen des Terms $\exp(-x^2)$; und zweiter Ordnung weil die höchsten Ableitungen u_{xx}, u_{xy} und u_{yy} zweiter Ordnung sind.

2) ***Partielle Ableitungen und elementare Differentialoperatoren***
Bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

(a) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x^2)y\right)$

(b) $\frac{\partial}{\partial z}\frac{xyz}{\log(x^2+yz^2)}$

(c) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(x^3y^2\sin(z)+z^{2017}+\cos(xyz)\right)$

(d) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(y^x+x^y)$, $y>2$

Weiterhin definieren wir für eine skalare Funktion $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sowie eine vektorwertige Funktion $\boldsymbol{F}=(F_1,...,F_n)^\top:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ die Differentialoperatoren

$$\begin{aligned}
\mathit{grad}\ \varphi(x_1,...,x_n) = \nabla\varphi(x_1,...,x_n) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_1,...,x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\varphi(x_1,...,x_n) \end{pmatrix} \\
\mathit{div}\ \boldsymbol{F}(x_1,...,x_n) = \nabla\cdot\boldsymbol{F}(x_1,...,x_n) &= \frac{\partial}{\partial x_1}F_1(x_1,...,x_n)+...+\frac{\partial}{\partial x_n}F_n(x_1,...,x_n) \\
\Delta\varphi(x_1,...,x_n) = \mathit{div}\,\mathit{grad}\,\varphi(x_1,...,x_n) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)\varphi(x_1,...,x_n)
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie damit die folgenden Ausdrücke:

(A) $\mathit{div}\begin{pmatrix} xyz \\ \sin(xy) \\ z^3+2x \end{pmatrix}$

(B) $\mathit{grad}\ (xy^2+e^{xy^2}-z)$

(C) $\mathit{div}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(D) $\Delta(x^2+y^2+\sin(z))$

Lösung:

(a)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x^2)y\right) = -2x\sin(x^2)y$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{xyz}{\log(x^2+yz^2)} = \frac{xy\ln(x^2+yz^2)-\frac{xyz2zy}{x^2+yz^2}}{\ln(x^2+yz^2)^2} = \frac{xy(x^2+yz^2)\ln(x^2+yz^2)-2xy^2z^2}{(x^2+yz^2)\ln(x^2+yz^2)^2}$$

(c)

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(x^3y^2\sin(z)+z^{2017}+\cos(xyz)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y\sin(z)-xz\sin(xyz)\right)$$
$$= 6x^2y\sin(z)-z\sin(xyz)-xyz^2\cos(xyz)$$

(d)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(y^x+x^y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{x\ln(y)}+x^y) = \frac{\partial}{\partial x}(\ln(y)e^{x\ln(y)}+yx^{y-1}) = \ln(y)^2y^x + y(y-1)x^{y-2}$$

(A)

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix} xyz \\ \sin(xy) \\ z^3+2x \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin(xy)) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3+2x) = yz + x\cos(xy) + 3z^2$$

(B)

$$\operatorname{grad}\,(xy^2+e^{xy^2}-z) = \begin{pmatrix} y^2+y^2e^{xy^2} \\ 2xy+2xye^{xy^2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

(C)

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial x_n}{\partial x_n} = n$$

(D)

$$\Delta(x^2+y^2+\sin(z)) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2+y^2+\sin(z)) = 4-\sin(z)$$

3) $(*)$ ***Wärmeleitungsgleichung I***
Gegeben sei das Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t), & \textit{für alle } (x,t)\in(0,10)\times\mathbb{R}_+, \\ u(0,t)=u(10,t)=0, & \textit{für alle } t\geq 0, \\ u(x,0)=f(x), & \textit{für alle } x\in(0,10). \end{cases}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung, wenn f von der folgenden Form ist:

(a) $f(x) = \sin(5\pi x) - 3\sin(\pi x)$,
(b) $f(x) = 2\sin(\frac{7\pi x}{2})$,
(c) $f(x) = \sin(3\pi x) + 2\cos(\frac{(6x+5)\pi}{10})$,
(d) $f(x) = 6\cos^2(\pi x - \frac{\pi}{4}) - 3$.

Lösung: Wie in der Vorlesung, benutzen wir die Methode der Separation der Variablen um das vorliegende Problem zu lösen. Mit dem Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ sehen wir, dass u eine Lösung des Anfangs- und Randwertproblems ist, wenn gilt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda = 4\frac{X''(x)}{X(x)}$$

für ein $\lambda\in\mathbb{R}$. Damit folgt, dass T gegeben ist durch $T(t) = ce^{-\lambda t}$. Um die Funktion X zu bestimmen unterscheiden wir drei Fälle:

A) $\lambda > 0$: In diesem Fall ist die Lösung von $X''(x) = -\frac{\lambda}{4}X(x)$ gegeben durch

$$X(x) = a\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x\right).$$

Aufgrund der Randbedingung $u(0,t) = 0$ und $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ folgt $a = 0$. Zusätzlich zeigt $u(10,t) = 0$, dass gilt $\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}10) = 0$. Damit erhalten wir

$$X(x) = b_n \sin\left(\frac{\pi n}{10}x\right), \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

B) $\lambda = 0$: In diesem Fall hat X die Form $X(x) = ax + b$. Aufgrund der Randbedingungen $u(0,t) = u(10,t) = 0$ erhalten wir $X = 0$ und damit $u = 0$.

C) $\lambda < 0$: In diesem Fall ist X gegeben durch

$$X(x) = a\cosh(\tfrac{\sqrt{\lambda}}{2}x) + b\sinh(\tfrac{\sqrt{\lambda}}{2}x).$$

Da gilt $\sinh(0) = 0$, $\cosh(0) = 1$, impliziert $u(0,t) = 0$ die Bedingung $a = 0$. Andererseits folgt aus $u(10,t) = 0$ die Bedingung $b = 0$, weil der Sinus-Hyperbolicus nur für $x = 0$ verschwindet.

Also hat die allgemeine Lösung die Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{\pi n}{10}x)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{25}t},$$

wobei die Koeffizienten b_n gegeben sind durch

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\tfrac{\pi n}{L}x)\,dx.$$

Dies folgt aus der Identität

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(\tfrac{\pi n}{L}x)\sin(\tfrac{\pi m}{L}x)\,dx = \delta_{n,m},$$

für n, $m \in \mathbb{N}$. Hier bezeichnet $\delta_{n,m}$ das Kronecker-Delta, welches definiert ist durch

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = m, \\ 0, & \text{wenn } n \neq m. \end{cases}$$

(a) Aus der Formel für die b_n und der darauffolgenden Identität erhalten wir $b_{10} = -3$, $b_{50} = 1$ und alle anderen b_n verschwinden. Damit folgt

$$u(x,t) = \sin(5\pi x)e^{-100\pi^2 t} - 3\sin(\pi x)e^{-4\pi^2 t}.$$

(b) Aus der Formel für die b_n und der darauffolgenden Identität erhalten wir $b_{35} = 2$ und alle anderen b_n verschwinden. Also gilt

$$u(x,t) = 2\sin(\tfrac{7\pi x}{2})e^{-49\pi^2 t}.$$

(c) Mit der Identität $\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(t)$ erhalten wir

$$f(x) = \sin(3\pi x) - 2\sin(\tfrac{6x\pi}{10}).$$

Nun folgt aus der Formel für die b_n und der darauffolgenden Identität, dass gilt $b_6 = -2$, $b_{10} = 1$ und sonst $b_n = 0$. Damit erhalten wir

$$u(x,t) = \sin(3\pi x)e^{-36\pi^2 t} - 2\sin(\tfrac{3\pi x}{5})e^{-\frac{36\pi^2}{25}t}.$$

(d) Die Funktion $f(x)$ ist aufgrund der Identitäten $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$, $\sin(t) = \cos(t - \pi/2)$ gegeben durch

$$f(x) = 3(2\cos^2(\pi x - \tfrac{\pi}{4}) - 1) = 3\cos(2\pi x - \tfrac{\pi}{2}) = 3\sin(2\pi x).$$

Es folgt aus der Formel für die b_n und der darauffolgenden Identität, dass gilt $b_{20} = 3$ und sonst $b_n = 0$. Damit ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = 3\sin(2\pi x)e^{-16\pi^2 t}.$$

4) **Wärmeleitungsgleichung II**

Wir definieren den Wärmeleitungskern durch

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\Big(- \frac{|x|^2}{4t}\Big) \quad \text{für} \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(a) K_t ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t K_t - \Delta K_t = 0$$

für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$

(b) $\lim_{t\to 0} K_t(x) = 0$ für $x \neq 0$.

(c) $\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x)\,dx = 1$ für $t > 0$. (**Tipp:** Sie dürfen das Resultat $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ verwenden.)

Betrachten Sie nun die Funktion u gegeben durch

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) f(y)\,dy,$$

wobei f eine stetige, beschränkte Funktion ist und $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Zeigen Sie:

(A) u ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

(B) u erfüllt

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$.

(C) Es gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x,t)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$$

für $t > 0$.

Lösung:

(a) Eine einfache Rechnung ergibt

$$\partial_t K_t(x) = \Big[- \frac{n}{2}\frac{4\pi}{4\pi t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\Big] K_t(x)$$

und

$$\begin{aligned}\Delta K_t(x) &= \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 K_t(x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\Big[- \frac{2x_i}{4t} K_t(x)\Big] \\ &= \sum_{i=1}^n \Big[- \frac{1}{2t} + \Big(\frac{2x_i}{4t}\Big)^2\Big] K_t(x) = \Big[- \frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\Big] K_t(x)\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Damit folgt $\partial_t K - \Delta K = 0$.

(b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
0 \le \lim_{t\to 0} K_t(x) &= \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \lim_{s\to\infty} s^{n/2} \exp\Big(- |x|^2 s/4\Big) \\
&\le \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \lim_{s\to\infty} s^{\lceil n/2\rceil} \exp\Big(- |x|^2 s/4\Big),
\end{aligned}
$$

wobei wir die Aufrundungsfunktion $\lceil x\rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \colon x \le k\}$ verwendeten. Mit der Regel von de L'Hospital erhalten wir

$$
\lim_{s\to\infty} s^{\lceil n/2\rceil} \exp\Big(- |x|^2 s/4\Big) \le 2^{\lceil n\rceil} \frac{\lceil n/2\rceil !}{|x|^{2\lceil n/2\rceil}} \lim_{s\to\infty} \exp\Big(- |x|^2 s/4\Big) = 0
$$

und damit folgt die Behauptung.

(c) Mit der Substitution $z = x/2\sqrt{t}$, $dx = 2^n t^{n/2}\, dz$ und $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\, dx = \sqrt{\pi}$ folgt

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x)\, dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(- \frac{|x|^2}{4t}\Big)\, dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|z|^2)\, dz \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \exp(-z_i^2)\, dz_i = 1
\end{aligned}
$$

für alle $t > 0$.

(A) Durch Vertauschung von Integration und Differentiation, sowie Teilaufgabe (a) erhalten wir

$$
u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t K(t, x-y) - \Delta_x K(t, x-y)) f(y)\, dy = 0.
$$

(B) Sei $\epsilon > 0$. Aus Teilaufgabe (c) folgt

$$
\begin{aligned}
|u(x,t) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) f(y)\, dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)(f(y) - f(x))\, dy \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) |f(y) - f(x)|\, dy
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Da f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ sodass $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - y| < \delta$ gilt. Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|u(x,t) - f(x)| &= \int_{B_\delta(x)} K_t(x-y)|f(y) - f(x)|\, dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x)} K_t(x-y)|f(y) - f(x)|\, dy \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x)} K_t(x-y)|f(y) - f(x)|\, dy
\end{aligned}
$$

wobei $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |x - y| < \delta\}$. Da f beschränkt ist, erhalten wir mit der Dreiecksungleichung folgende Abschätzung

$$
|u(x,t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x)} K_t(x-y)\, dy,
$$

wobei $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$. Um das letzte Integral auszuwerten verwenden wir zuerst die Substitution $z = x - y$, gehen dann in Polarkoordinaten über und verwenden schlussendlich die Substituation $s = r/(2\sqrt{t})$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}|u(x,t) - f(x)| &< \frac{\epsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\delta(0)} K_t(z)\,dz \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\omega_n\|f\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_\delta^\infty r^{n-1}\exp\Big(-\frac{r^2}{4t}\Big)\,dr \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\omega_n\|f\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}}(2\sqrt{t})^n \int_{\delta/(2\sqrt{t})}^\infty s^{n-1}\exp(-s^2)\,ds \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\omega_n\|f\|_\infty}{\pi^{n/2}} \int_{\delta/(2\sqrt{t})}^\infty s^{n-1}\exp(-s^2)\,ds,\end{aligned}$$

wobei ω_n die Oberfläche der n-dimensionalen Sphäre bezeichnet. Aus der Abschätzung

$$\int_0^\infty s^{n-1}\exp(-s^2)\,ds \le C < \infty$$

folgt, dass es ein $t_0 > 0$ gibt sodass

$$\int_{\delta/(2\sqrt{t})}^\infty s^{n-1}\exp(-s^2)\,ds < \epsilon\frac{\pi^{n/2}}{4\omega_n\|f\|_\infty}.$$

für alle $0 < t < t_0$ gilt. Damit erhalten wir

$$|u(x,t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

für alle $0 < t < t_0$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgt die Behauptung $\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$.

(C) Mit Teilaufgabe (c) erhalten wir

$$|u(x,t)| \le \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)|f(y)|\,dy \le (\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|)\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)\,dy = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Mit der Definition des Supremums folgt die Behauptung.