D-HEST Mathematik III HS 2021
Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Musterlösung zu Serie 12

1) ***Kurzfragen und Multiple Choice Aufgaben***

(i) Sei u die eindeutige Lösung der Laplace-Gleichung auf der Einheitskreisscheibe mit Randwerten $u(x,y) = xy + 3$. Beantworten Sie folgende Fragen ohne ein Integral zu berechnen.

(a) Wie lautet $u(x,y)$ in kartesischen Koordinaten?

(b) Welchen Wert hat u im Punkt $(0,0)$?

(c) Was ist das Maximum von u und in welchen Punkten wird es angenommen?

(ii) Existiert eine Funktion u so dass

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } B_r(0), \\ u(r,\phi) = (\sin(\phi))^9, & \phi \in [0, 2\pi), \\ u + 1/2 \geq 0, & \text{in } \overline{B}_r(0), \end{cases}$$

wobei $B_r(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < r^2\}$ und $r > 0$.

Lösung:

(i) Wir beobachten, dass die Funktion $v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $v(x,y) = xy + 3$ eine Lösung der Laplace-Gleichung auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist und somit insbesondere eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{in } B_1(0), \\ w(x,y) = xy + 3, & (x,y) \in \partial B_1(0). \end{cases}$$

(a) Aus der vorherigen Beobachtung und der Tatsache, dass Lösungen des Dirichlet-Problems für die Laplace-Gleichung eindeutig sind, folgt $u(x,y) = v(x,y)$.

(b) Aus (a) folgt $u(0,0) = 3$.

(c) Aus dem Maximumprinzip erhalten wir

$$\max_{(x,y)\in\overline{B_1(0)}} u(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial B_1(0)} u(x,y).$$

Auf dem Rand ist die Funktion u in Polarkoordinaten gegeben durch

$$U(\theta) = u(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \sin\theta + 3 = \frac{\sin(2\theta)}{2} + 3,$$

wobei wir die Identität $\sin(2x) = 2\cos x \sin x$ verwendet haben. Diese Funktion, und somit auch u, hat das Maximum $7/2$, welches z.B. im Punkt $\theta = \pi/4$ angenommen wird.

(ii) Wir nehmen an, dass eine Lösung u existiert. Nach dem Minimumprinzip nimmt die Funktion u ihr Minimum auf $\overline{B_r(0)}$ an und dieses stimmt mit dem Minimum der Randfunktion auf $\partial B_r(0)$ überein. Das Minimum der Randfunktion $[0, 2\pi) \ni \phi \mapsto (\sin\phi)^9$ ist -1 und somit gilt $u(x,y) + 1/2 = -1/2$ für einen Punkt $(x,y) \in \partial B_r(0)$. Daraus schliessen wir, dass keine Lösung des gegebenen Problems existieren kann.

2) ***Laplace-Gleichung auf Rechteck***
Lösen Sie folgendes Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & \textit{für } 0 < x < 1,\, 0 < y < 1, \\ u(x,0) = \sin(\pi x) - \sin(2\pi x), & \textit{für } 0 \le x \le 1, \\ u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0, & \textit{für } 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Lösung: Der Separationsansatz $u(x,y) = v(x)w(y)$ führt zu den folgenden zwei gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$v''(x) = \lambda v(x), \quad w''(y) = -\lambda w(y)$$

für eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden die folgenden 3 Fälle:

A) $\lambda > 0$: In diesem Fall gilt

$$v(x) = A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + B_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad w(y) = A_2 e^{i\sqrt{\lambda}y} + B_2 e^{-i\sqrt{\lambda}y}$$

für Konstanten $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$.

B) $\lambda = 0$: Die Funktionen v, w erfüllen $v''(x) = 0, w''(y) = 0$ und somit sind sie gegeben durch

$$v(x) = A_1 x + B_1, \quad w(y) = A_2 y + B_2$$

für Konstanten $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$.

C) $\lambda < 0$: In diesem Fall gilt $-\lambda > 0$ und damit folgt

$$v(x) = A_1 e^{i\sqrt{-\lambda}x} + B_1 e^{-i\sqrt{-\lambda}x}, \quad w(y) = A_2 e^{\sqrt{-\lambda}y} + B_2 e^{-\sqrt{-\lambda}y}$$

für Konstanten $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$.

Die Funktion v in A) bzw. B) kann auf dem Rand $\{(x,0)\colon 0 \le x \le 1\}$ keine periodische Funktion darstellen. Weil $e^{\pm i\sqrt{-\lambda}x}$ denselben Vektorraum aufspannen wie $\sin(\sqrt{-\lambda}x)$, $\cos(\sqrt{-\lambda}x)$, können wir v in C) schreiben als

$$v(x) = A_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Die Funktion $v(x)$ kann nur $v(0) = v(1) = 0$ erfüllen, wenn $B_1 = 0$ und $\sqrt{-\lambda} = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit erhalten wir eine Lösung

$$v_n(x) = A_n \sin(n\pi x)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Bedingung $w(1) = 0$ liefert $A_2 e^{\sqrt{-\lambda}} + B_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$ und damit folgt $B_2 = -A_2 e^{2\sqrt{-\lambda}}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} w(y) &= A_2(e^{\sqrt{-\lambda}y} - e^{2\sqrt{-\lambda}} e^{-\sqrt{-\lambda}y}) = A_2 e^{\sqrt{-\lambda}}(e^{\sqrt{-\lambda}(y-1)} - e^{-\sqrt{-\lambda}(y-1)}) \\ &= 2A_2 e^{\sqrt{-\lambda}} \sinh(\sqrt{-\lambda}(y-1)). \end{aligned}$$

Also erhalten wir wieder für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung und zwar

$$w_n(y) = B_n \sinh(n\pi(y-1)).$$

Deshalb ist die allgemeine Lösung des Problems gegeben durch

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(n\pi(y-1)) \sin(n\pi x).$$

Die letzte Randbedingung $u(x,0) = \sin(\pi x) - \sin(2\pi x)$ liefert die Bedingungen

$$-C_1 \sinh(\pi) = 1, \quad -C_2 \sinh(2\pi) = -1, \quad \text{und} \quad C_n = 0 \quad \text{für} \quad n \neq 1, 2.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(n\pi(y-1))\sin(n\pi x)\\ &= -\frac{\sinh(\pi(y-1))\sin(\pi x)}{\sinh(\pi)} + \frac{\sinh(2\pi(y-1))\sin(2\pi x)}{\sinh(2\pi)}.\end{aligned}$$

3) ***Laplace-Gleichung auf Kreisscheibe***
Betrachten Sie das folgende Randwertproblem für die Laplace-Gleichung

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & (x,y)\in B_1(0)\\ u(x,y) = x^2+2xy+y^2, & (x,y)\in \partial B_1(0),\end{cases}$$

wobei $B_1(0) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2<1\}$.

(a) Finden Sie den Wert von u *im Punkt* $(0,0)$.

(b) Finden Sie das Maximum von u *auf* $\overline{B}_1(0)$.

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung u des Dirichlet-Problems für die Laplace-Gleichung auf der Einheitskreisscheibe und Randwerten beschrieben durch eine Funktion $g(x,y)$ gegeben ist durch

$$v(r,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\phi-\phi')+r^2} h(\phi')\,d\phi', \tag{1}$$

wobei

- $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$
- $g(x,y) = h(\phi)$ für $x^2+y^2 = 1$ und
- $u(x,y) = v(r,\phi)$ für $x^2+y^2\le 1$.

(a) Aus (1) folgt

$$\begin{aligned}u(0,0) = v(0,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\,d\phi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ((\cos\phi)^2 + 2\cos\phi\sin\phi + (\sin\phi)^2)\,d\phi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\sin(2\phi))\,d\phi = 1 - \frac{1}{2}\cos(2\phi)\Big|_0^{2\pi} = 1\end{aligned}$$

wobei wir den trigonometrischen Satz des Pythagoras verwendet haben und die Identität $2\sin x\cos x = \sin(2x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(b) Nach dem Maximumprinzip wird das Maximum auf dem Rand angenommen und damit müssen wir das Maximum der Funktion

$$[0,2\pi)\ni\phi\mapsto h(\phi) = 1+\sin(2\phi),$$

jedoch gilt $\sin(x)\subset[-1,1]$ und $\sin(\pi/2) = 1$. Wir erhalten

$$\max_{(x,y)\in\overline{B_1(0)}} u(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial B_1(0)} u(x,y) = \max_{\phi\in[0,2\pi)} h(\phi) = 2.$$

4) ***Fourier-Transformation***
Berechnen Sie die Fourier-Transformierte folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \begin{cases} 3(1-x/2), & 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{für alle } x > 0, \\ 0, & \text{für alle } x \le 0, \end{cases}$ für eine Konstante $a > 0$.

(c) $f(x) = e^{-a(x-b)^2}$ mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$,

(d) $f(x) = 8xe^{-2(x-1)^2}$.

Lösung:

(a) Für $k \neq 0$ erhalten wir aus der Definition der Fouriertransformation

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}\,dx = 3\int_0^2 (1-x/2)e^{-ikx}\,dx \\
&= -\frac{3}{ik}\,e^{-ikx}\Big|_0^2 - \frac{3}{2}\int_0^2 i\frac{d}{dk}e^{-ikx}\,dx = -\frac{3}{ik}\,e^{-ikx}\Big|_0^2 - \frac{3i}{2}\frac{d}{dk}\int_0^2 e^{-ikx}\,dx \\
&= -\frac{3}{ik}(e^{-2ik}-1) - \frac{3i}{2}\frac{d}{dk}\frac{e^{-2ik}-1}{-ik} = \frac{3}{ik}(1-e^{-2ik}) + \frac{3}{2}\frac{d}{dk}\frac{e^{-2ik}-1}{k} \\
&= \frac{3}{ik}(1-e^{-2ik}) + \frac{3}{2}\frac{-2ie^{-2ik}k - (e^{-2ik}-1)}{k^2} \\
&= \frac{3}{ik}(1-e^{-2ik}) - 3i\frac{e^{-2ik}}{k} + \frac{3}{2}\frac{1-e^{-2ik}}{k^2} = \frac{3}{ik} + \frac{3}{2}\frac{1-e^{-2ik}}{k^2},
\end{aligned}$$

wobei wir

$$i\frac{d}{dk}e^{-ikx} = i(-ix)e^{-ikx} = xe^{-ikx} \quad \text{und} \quad 1/i = -i$$

verwendet haben. Für $k = 0$ haben wir

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 3\int_0^2 (1-x/2)\,dx = 3(2-2^2/4) = 3.$$

Alternativ kann man $\hat{f}(0)$ wie folgt berechnen:

$$\hat{f}(0) = \lim_{k\to 0}\hat{f}(k) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{3}{ik} + \frac{3}{2}\frac{1-e^{-2ik}}{k^2}\right) = \frac{3}{2}\lim_{k\to 0}\left(\frac{1-2ik-e^{-2ik}}{k^2}\right) = 3.$$

Hier haben wir verwendet, dass die Fouriertransformation einer integrierbaren Funktion stetig ist.

(b) Aus der Definition der Fouriertransformation folgt

$$\widehat{f}(k) = \int_0^\infty e^{-ax}e^{-ikx}\,dx = \int_0^\infty e^{-(a+ik)x}dx = -\frac{1}{a+ik}\,e^{-(a+ik)x}\Big|_0^\infty$$

für alle $k \in \mathbb{R}$. Mit

$$\lim_{x\to\infty}|e^{-(a+ik)x}| = \lim_{x\to\infty}e^{-ax} = 0$$

erhalten wir $\widehat{f}(k) = (a+ik)^{-1}$.

(c) Mit den Substitutionen $y = x - b$ bzw. $z = \sqrt{2a}y$ folgt

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x-b)^2}e^{-ikx}\,dx = e^{-ikb}\int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2}e^{-iky}\,dy \\
&= \frac{e^{-ikb}}{\sqrt{2a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2}e^{-i\frac{k}{\sqrt{2a}}z}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-ikb}\widehat{\varphi}\left(k/\sqrt{2a}\right)
\end{aligned}$$

wobei die Funktion φ gegeben ist durch $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Fouriertransformation von φ gegeben ist durch $\hat{\varphi}(k) = e^{-k^2/2}$ und damit folgt

$$\widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-ikb} e^{-k^2/4a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a} - ikb}.$$

(d) Mit $g(x) = e^{-2(x-1)^2}$ und der Kettenregel erhalten wir

$$g'(x) = -4(x-1)e^{-2(x-1)^2} = -\frac{f(x)}{2} + 4g(x)$$

woraus folgt $f(x) = 2(4g(x) - g'(x))$. Wegen der Linearität der Fouriertransformation, dem Resultat

$$\mathcal{F}[e^{-a(x-b)^2}](k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a} - ikb}$$

für $a > 0, b \in \mathbb{R}$ aus Teilaufgabe (c) und der Ableitungsregel $\mathcal{F}[f'](k) = ik\mathcal{F}[f](k)$ für $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](k) &= 2(4\mathcal{F}[g](k) - \mathcal{F}[g'](k)) = 2(4\mathcal{F}[g](k) - ik\mathcal{F}[g](k)) \\ &= 2\,(4 - ik)\,\mathcal{F}[g](k) = \sqrt{2\pi}(4 - ik)e^{-k^2/8 - ik} \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{R}$.