D-HEST | Mathematik III | HS 2021

Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

# Musterlösung zu Serie 2

1. **Komplexe Fourierreihe und Euler'sche Identität**
   Betrachten Sie die Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - 2|x|/\pi$ für alle $x \in [-\pi,\pi]$.

   (a) Berechnen Sie die Koeffizienten $c_n$ der komplexen Fourierreihe

   $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

   (b) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_n$ und $b_n$ der reellen Fourierreihe

   $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

   (c) Zeigen Sie die Euler'sche Identität:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

   **Lösung:**

   (a) Da $f$ sich als Komposition einer affinen Funktion mit $x \mapsto |x|$ schreiben lässt, folgt dass $f$ eine gerade Funktion ist. Mit partieller Integration erhalten wir

   $$\begin{aligned} c_n &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \tfrac{2}{\pi}|x|) e^{-inx}\, dx = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, dx - \tfrac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-inx}\, dx \\ &= \delta_{n,0} - \tfrac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi} x(e^{-inx} + e^{inx})\, dx = \delta_{n,0} - \tfrac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\, dx \\ &= \delta_{n,0} - \tfrac{2}{\pi^2}\Big( \tfrac{x\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \tfrac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx \Big)(1-\delta_{n,0}) - \tfrac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\, dx\, \delta_{n,0} \\ &= -\tfrac{2}{\pi^2 n^2}(\cos(n\pi) - 1)(1 - \delta_{n,0}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \in 2\mathbb{Z}, \\ \frac{4}{n^2\pi^2}, & \text{falls } n \in 2\mathbb{Z}+1. \end{cases} \end{aligned}$$

   (b) Aus der Vorlesung wissen wir $a_n = c_n + c_{-n}$ und $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Damit folgt aus der obigen Rechnung

   $$a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ \frac{8}{n^2\pi^2}, & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}+1, \end{cases} \quad \text{und} \quad b_n = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

   In der Tat ist $f$ eine stetige Funktion und die Dirichlet-Bedingungen sind erfüllt, womit mit Korollar 1.6 folgt, dass die (reelle oder komplexe) Fourierreihe die Funktion $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ darstellt.

   (c) Werten wir die Fourier-Reihe für $f$ im Punkt $x = 0$, so folgt

   $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

und somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. **Komplexe Fourierreihe und alternierende Reihe**
Betrachten Sie die Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & \text{für alle} \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ x(\pi + x), & \text{für alle} \ -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe von $f$.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von $f$.

(c) Beweisen Sie, dass gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

**Lösung:**

(a) $f$ ist eine ungerade Funktion, denn es gilt

$$\begin{cases} f(-x) = (-x)(\pi + (-x)) = -x(\pi - x) = -f(x), & \text{für alle} \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ f(-x) = (-x)(\pi - (-x)) = -x(\pi + x) = -f(x), & \text{für alle} \ -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Damit folgt $c_0 = 0$. Für $n \neq 0$ erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} c_n &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} x(\pi + x) e^{-inx}\, dx + \tfrac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} x(\pi - x) e^{-inx}\, dx \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} x(\pi - x)(e^{-inx} - e^{inx})\, dx = \tfrac{1}{\pi i} \int_{0}^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx)\, dx \\ &= \tfrac{1}{\pi i} \Big( \tfrac{-1}{n} x(\pi - x)\cos(nx)|_0^{\pi} + \tfrac{1}{n} \int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos(nx)\, dx \Big) \\ &= \tfrac{1}{n\pi i} \Big( \tfrac{1}{n}(\pi - 2x)\sin(nx)|_0^{\pi} + \tfrac{2}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx \Big) = -\tfrac{2}{n^3 \pi i}(\cos(n\pi) - 1) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \in 2\mathbb{Z}, \\ \frac{4}{n^3 \pi i}, & \text{wenn } n \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Aus der Vorlesung wissen wir $a_n = c_n + c_{-n}$ und $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Also folgt aus der vorherigen Rechnung

$$a_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{and} \quad b_n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \in 2\mathbb{N}, \\ \frac{8}{n^3 \pi}, & \text{wenn } n \in 2\mathbb{N} + 1. \end{cases}$$

Damit ist die reelle Fourier-Reihe gegeben durch

$$f(x) = \tfrac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(2k+1)^3} \sin((2k+1)x).$$

Wir können in Teilaufgabe (a), (b) in der Tat ein Gleichheitszeichen schreiben, weil die Bedingungen in Korollar 1.6 erfüllt sind.

(c) Wenn wir die reelle Fourier-Reihe in $x = \pi/2$ auswerten, erhalten wir

$$\tfrac{\pi^2}{4} = \tfrac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Dies ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \tfrac{\pi^3}{32}.$$

3. **Fourierreihen in $d \geq 2$ Dimensionen**

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist $2\pi$-periodisch, falls gilt $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}+2\pi\boldsymbol{e}_i)$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ und $i \in \{1, ..., d\}$. Hier bezeichnet $\boldsymbol{e}_i = (0, ..., 1, ...0)^\top$ den Einheitsvektor in die $i$-te Koordinatenrichtung. Für $\boldsymbol{m} = (m_1, ..., m_d)^\top \in \mathbb{Z}^d$ definieren wir dann komplexe Fourierkoeffizienten durch:

$$c_{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{m}} dx_1 ... dx_d.$$

Plotten Sie in einem geeigneten Ausschnitt die folgenden Funktionen und berechnen Sie ihre Fourierkoeffizienten ($d = 2$):

(a) $f_1(x_1, x_2) = \sin(x_1)\cos(2x_2)$

(b) $f_2$, die $2\pi$-periodische Fortsetzung von $f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$ für $(x_1, x_2)^\top \in [-\pi, \pi]^2$ nach $\mathbb{R}^2$

(c) $f_3$, die $2\pi$-periodische Fortsetzung von $f_3(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1 \\ 0, & \max\{|x_1|, |x_2|\} > 1, \end{cases}$

für $(x_1, x_2)^\top \in [-\pi, \pi]^2$ nach $\mathbb{R}^2$.

**Lösung:**

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x_1)\cos(2x_2) &= \frac{1}{4i}(e^{ix_1} - e^{-ix_1})(e^{2ix_2} + e^{-2ix_2}) \\ f &= \frac{1}{4i}(e^{i(x_1+2x_2)} - e^{i(-x_1+2x_2)} + e^{i(x_1-2x_2)} - e^{i(-x_1-2x_2)}). \end{aligned}$$

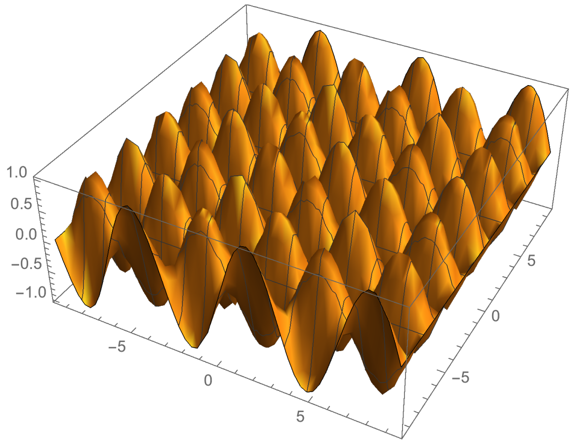
Mit $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ilx}\, dx = (2\pi)\delta_{k,l}$ folgt

$$c_{(1,2)} = -\tfrac{1}{4}i, \quad c_{(-1,2)} = \tfrac{1}{4}i, \quad c_{(1,-2)} = -\tfrac{1}{4}i, \quad c_{(-1,-2)} = \tfrac{1}{4}i,$$

$c_{\boldsymbol{m}} = 0$ für alle $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(1, 2), (-1, 2), (1, -2), (-1, -2)\}$.

(b) Zunächst sei $m_1 \neq 0$ und $m_2 \neq 0$. Dann ist:

$$\begin{aligned} c_{\boldsymbol{m}} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x_1 x_2 e^{-ix_1 m_1 - ix_2 m_2} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \left[ x_1 \frac{1}{-im_1} e^{-im_1 x_1} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{im_1} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im_1 x_1} dx_1}_{=\frac{1}{-im_1}[e^{-im_1 x_1}]_{-\pi}^{\pi}=0} \right) x_2 e^{-im_2 x_2} dx_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \frac{i}{m_1} (-1)^{m_1} x_2 e^{-im_2 x_2} dx_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 (-1)^{m_1+m_2} \frac{i^2}{m_1 m_2} = \frac{(-1)^{m_1+m_2+1}}{m_1 m_2}. \end{aligned}$$

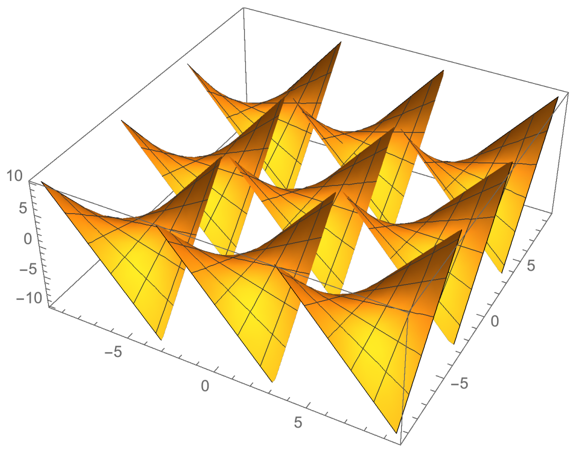



Falls nun $m_j = 0$ (für $j \in \{1, 2\}$) ist, gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x_j e^{-i0 \cdot x_j} \, dx_j = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} x_j^2 \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Also haben wir:

$$c_{(m_1, m_2)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{m_1+m_2+1}}{m_1 m_2}, & m_1 \neq 0 \text{ und } m_2 \neq 0, \\ 0, & m_1 = 0 \text{ oder } m_2 = 0. \end{cases}$$




(c) Man beachte, dass $f_3(x_1, x_2) = 1$ genau dann, wenn $(x_1, x_2)^\top \in [-1, 1]^2$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $m_1, m_2 \neq 0$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
c_{\boldsymbol{m}} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_3(x_1, x_2) e^{-i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} e^{-im_1x_1 - im_2x_2} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{1} \left[ \frac{1}{-im_1} e^{-im_1x_1} \right]_{-1}^{1} e^{-im_2x_2} dx_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{-im_1} (e^{-im_1} - e^{im_1}) \int_{-1}^{1} e^{-im_2x_2} dx_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{m_1} \sin(m_1) \int_{-1}^{1} e^{-im_2x_2} dx_2 \\
&= \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin(m_1)\sin(m_2)}{m_1 m_2}.
\end{aligned}$$

Falls $m_j = 0$ (für $j \in \{1, 2\}$), so ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} e^{-im_jx_j} dx_j = \frac{1}{\pi}.$$

Also ist:

$$c_{(m_1,m_2)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin(m_1)\sin(m_2)}{m_1 m_2}, & m_1 \neq 0 \text{ und } m_2 \neq 0, \\ \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin(m_1)}{m_1}, & m_1 \neq 0 = m_2, \\ \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin(m_2)}{m_2}, & m_2 \neq 0 = m_1, \\ \frac{1}{\pi^2}, & m_1 = m_2 = 0. \end{cases}$$