Musterlösung zu Serie 3

1. ***Fourierreihen*** *(Prüfungsaufgabe HS 2018)*
Die Funktion f sei gegeben als $f(t) = e^{2t}$ auf $[-1, 1[$, 2-periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$.

Weiterhin konvergiert die reelle Fourierreihe der Funktion f auf $]-1, 1[$ gegen f, es gilt also:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) \qquad \text{für } t \in]-1, 1[$$

mit $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

(a) *Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-3, 3[$.*

(b) *Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von f.*

Hinweis: *Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $e^{i\pi n} = (-1)^n$.*

(c) *Weisen Sie nach, dass für jede P-periodische Funktion g $(P > 0)$ die Beziehungen*

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, && \text{für } n \geq 0, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}), && \text{für } n \geq 1, \end{aligned}$$

zwischen komplexen und reellen Fourierkoeffizienten von g gelten.

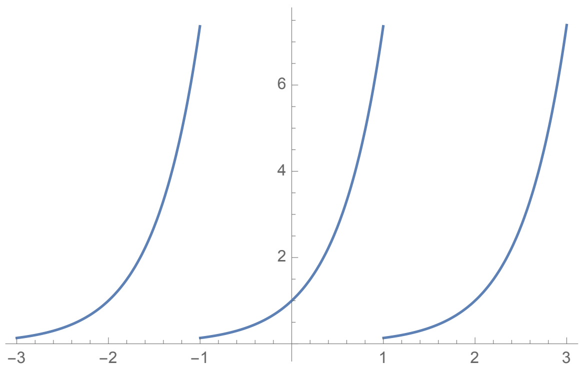
(d) *Bestimmen Sie mit* ***c)*** *die reelle Fourierreihe von f.*

(e) *Zeigen Sie mithilfe der reellen Fourierreihe von f, dass gilt:*

$$\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4 + n^2\pi^2} = \frac{1}{4\sinh(2)}.$$

Lösung:

(a) Der Funktionsgraph hat auf $]-3, 3[$ die folgende Form:



(b) Die Funktion f ist 2-periodisch, also benutzen wir $P = 2$ in der allgemeinen Formel für die komplexen Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(t)e^{-\frac{2\pi int}{P}}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{2t}e^{-\pi int}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{(2-in\pi)t}dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2-in\pi}\left[e^{(2-in\pi)t}\right]_{-1}^{1} = \frac{(-1)^n}{2-in\pi}\sinh(2). \end{aligned}$$

(c) Wir benutzen $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ und $\sin(\alpha) = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} \cos\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) g(t)dt \\ &= \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi int}{P}} + e^{\frac{-2\pi int}{P}}\right) g(t)dt \\ &= \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} g(t)e^{\frac{2\pi int}{P}}dt + \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} g(t)e^{-\frac{2\pi int}{P}}dt \\ &= c_{-n} + c_n, \\ b_n &= \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} \sin\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) g(t)dt \\ &= \frac{2}{P}\int_{-P/2}^{P/2} \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{2\pi int}{P}} - e^{\frac{-2\pi int}{P}}\right) g(t)dt \\ &= \frac{i}{P}\int_{-P/2}^{P/2} g(t)e^{-\frac{2\pi int}{P}}dt - \frac{i}{P}\int_{-P/2}^{P/2} g(t)e^{\frac{2\pi int}{P}}dt \\ &= i(c_n - c_{-n}). \end{aligned}$$

(d) Mit den Formeln aus (c) ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n\sinh(2)\left(\frac{1}{2-in\pi} + \frac{1}{2+in\pi}\right) \\ &= \frac{4(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\sinh(2), \\ b_n &= (-1)^n\sinh(2)i\left(\frac{1}{2-in\pi} - \frac{1}{2+in\pi}\right) \\ &= \frac{2n\pi(-1)^{n+1}}{4+n^2\pi^2}\sinh(2). \end{aligned}$$

Somit lautet die reelle Fourierreihe von f:

$$\frac{1}{2}\sinh(2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\sinh(2)\cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi(-1)^{n+1}}{4+n^2\pi^2}\sinh(2)\sin(n\pi t).$$

(e) Da die Fourierreihe von f auf $]-1,1[$ gegen f konvergiert, setzen wir $t = 0$ in die

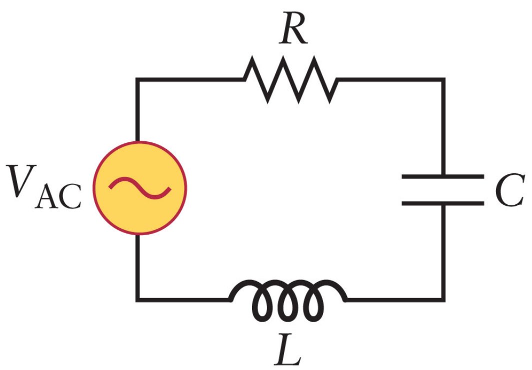
Fourierreihe aus (d) ein und erhalten:

$$1 = \frac{1}{2}\sinh(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\sinh(2)\underbrace{\cos(0)}_{=1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi(-1)^{n+1}}{4+n^2\pi^2}\sinh(2)\underbrace{\sin(0)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = \frac{1}{2}\sinh(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\sinh(2)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{4\sinh(2)} = \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4+n^2\pi^2}.$$

2. **Inhomogene DGL mit periodischer Anregung**
Wir betrachten einen LCR-Schwingkreis in Reihenschaltung mit periodischer Anregung V_{AC}, wobei $V_{AC}(t) = 5t(\pi^2 - t^2)$ für $t \in [-\pi, \pi[$ 2π-periodisch fortgesetzt werde.



Aus einer Spannungsbilanz erhält man

$$L\frac{d^2}{dt^2}I(t) + R\frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{C}I(t) = \frac{d}{dt}V_{AC}(t). \tag{1}$$

Es seien $L = 10$, $R = 300$ und $C = 0.001$ in geeigneten Einheiten.

(a) Lösen Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung und zeigen Sie, dass für jede Lösungsfunktion I_h gilt: $\lim_{t\to\infty} I_h(t) = 0$.

(b) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von $\frac{d}{dt}V_{AC}(t)$.

(c) Berechnen Sie eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (1) mithilfe eines Reihenansatzes.

Hinweis: Es gilt $\frac{d}{dt}V_{AC}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$ mit den in (b) gefundenen Koeffizienten a_n, b_n. Finden Sie für jedes $n \geq 1$ eine spezielle Lösung der Gleichung

$$L\frac{d^2}{dt^2}I_n(t) + R\frac{d}{dt}I_n(t) + \frac{1}{C}I_n(t) = a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$$

und für $n = 0$ eine spezielle Lösung der Gleichung

$$L\frac{d^2}{dt^2}I_0(t) + R\frac{d}{dt}I_0(t) + \frac{1}{C}I_0(t) = \frac{a_0}{2}.$$

Dann ist $I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(t)$ eine Lösung von (1).

Lösung:

(a) Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d^2}{dt^2}I_h(t) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}I_h(t) + \frac{1}{LC}I_h(t) = 0$$
$$\frac{d^2}{dt^2}I_h(t) + 30\frac{d}{dt}I_h(t) + 100I_h(t) = 0 \qquad \text{(Zahlenwerte)}$$

Das charakteristische Polynom zu dieser Differentialgleichung lautet

$$\lambda^2 + 30\lambda + 100$$

und dieses hat die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = -15 \pm \sqrt{225 - 100} = -15 \pm 5\sqrt{5}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$I_h(t) = C_1 \exp(-(15 + 5\sqrt{5})t) + C_2 \exp(-(15 - 5\sqrt{5})t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Da $-15 \pm 5\sqrt{5} < 0$, folgt somit $\lim_{t\to\infty} I_h(t) = 0$.

(b) Es gilt $\frac{d}{dt}V_{AC}(t) = 5\pi^2 - 15t^2$. Also ist V'_{AC} eine gerade Funktion. Die Fourierkoeffizienten sind:

$$\begin{aligned}
b_n &= 0, \qquad n \geq 1 \text{ (da } V'_{AC} \text{ gerade)}\\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (5\pi^2 - 15t^2)dt = \frac{2}{\pi}\left[5\pi^2 t - 5t^3\right]_0^\pi = 0,\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (5\pi^2 - 15t^2)\cos(nt)dt\\
&= \frac{10\pi}{n}\underbrace{[\sin(nt)]_0^\pi}_{=0} - \frac{30}{\pi n}\underbrace{\left[t^2\sin(nt)\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{60}{\pi n}\int_0^\pi t\sin(nt)dt\\
&= -\frac{60}{\pi n^2}[t\cos(nt)]_0^\pi + \frac{60}{\pi n^2}\int \cos(nt)dt\\
&= -\frac{60}{n^2}\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \frac{60}{\pi n^3}\underbrace{[\sin(nt)]_0^\pi}_{=0}\\
&= \frac{60}{n^2}(-1)^{n+1}, \qquad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Hinweis: Alternativ kann man a_0 berechnen durch:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi V'_{AC}(t)dt = V_{AC}(\pi) - V_{AC}(0) = 0.$$

(c) Für $n \geq 1$ haben wie folgende inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung zu lösen:

$$\frac{d^2}{dt^2}I_n(t) + 30\frac{d}{dt}I_n(t) + 100I_n(t) = \underbrace{\frac{60}{L}}_{=6}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(nt).$$

Wir überführen diese Gleichung in die komplexe Form:

$$\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{I}_n(t) + 30\frac{d}{dt}\widetilde{I}_n(t) + 100\widetilde{I}_n(t) = 6\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}e^{int}.$$

Mit dem Ansatz $\widetilde{I}_n(t) = C_n e^{int}$ findet man

$$\begin{aligned}
-C_n n^2 e^{int} + 30 C_n i n e^{int} + 100 C_n e^{int} &= 6\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} e^{int} \\
\Rightarrow \qquad C_n &= \frac{6(-1)^{n+1}}{n^2(-n^2+30in+100)} \\
&= \frac{6(-1)^{n+1}\big((100-n^2)-30in\big)}{n^2\left((100-n^2)^2+900n^2\right)}.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $I_n(t) = Re\ \widetilde{I}_n(t)$ und finden somit:

$$\begin{aligned}
I_n(t) &= Re\ \widetilde{I}_n(t) \\
&= Re\left((Re\ C_n + i Im\ C_n)(\cos(nt) + i\sin(nt))\right) \\
&= (Re\ C_n)\cos(nt) - (Im\ C_n)\sin(nt) \\
&= \frac{6(-1)^{n+1}}{n^2\left((100-n^2)^2+900n^2\right)}\big\{(100-n^2)\cos(nt) + 30n\sin(nt)\big\}.
\end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung von (1) lautet somit:

$$I_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6(-1)^{n+1}}{n^2\left((100-n^2)^2+900n^2\right)}\big\{(100-n^2)\cos(nt) + 30n\sin(nt)\big\}.$$

Man beachte, dass wir keinen Term für $n = 0$ erhalten, da $a_0 = 0$.

Hinweis: Wegen $\lim_{t\to\infty} I_h(t) = 0$*, siehe (a), verhält sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung* (1) *für t hinreichend gross wie* $I_p(t)$