D-HEST
Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Musterlösung zu Serie 4

1. ***Diagonalisierung von Matrizen***
Betrachten Sie folgende $2 \times 2-$*Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) *Ist* A *diagonalisierbar? Falls ja, finden Sie eine Diagonalmatrix* D *und eine invertierbare Matrix* P *so dass* $A = PDP^{-1}$.

(b) *Berechnen Sie* A^n *für* $n \in \mathbb{N}$.

(c) *Berechnen Sie* $\exp(A)$.

Lösung:

(a) Gemäss Proposition 0.52 ist A genau dann diagonalisierbar wenn die Eigenvektoren von A eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden und in diesem Fall ist $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ und $P = (v_1, v_2)$, wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte und v_1, v_2 die Eigenvektoren von A sind. Das charakteristischen Polynom von A ist

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -6 \\ 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda-4) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)\end{aligned}$$

und damit hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Um die Eigenvektoren zu finden müssen wir die Gleichungssysteme

$$Av_1 = v_1 \quad \text{und} \quad Av_2 = 2v_2$$

lösen, d.h. $v_1 = (v_1^{(1)}, v_1^{(2)})^T, v_2 = (v_2^{(1)}, v_2^{(2)})^T$ erfüllen

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $v_1 = (3,1)^T, v_2 = (2,1)^T$ und wir setzen

$$P = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind genau dann wenn $\det P \neq 0$. Eine einfache Rechnung zeigt $\det P = 3 - 2 = 1$ und somit sind v_1, v_2 linear unabhängig, woraus folgt dass A diagonalisierbar ist.

(b) In Kapitel 0 haben wir gesehen, dass $A^n = PD^nP^{-1}$ gilt. Aus der Vorlesung Mathematik I wissen wir dass die Inverse einer Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Also erhalten wir mit $\det P = 1$:

$$\begin{aligned}
A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2^n & 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & -6 + 3 \cdot 2^{n+1} \\ 1 - 2^n & -2 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Aus der Definition 0.56 folgt

$$\begin{aligned}
\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^2 \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3e - 2e^2 & -6e + 6e^2 \\ e - e^2 & -2e + 3e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(3-2e) & -6e(1-e) \\ e(1-e) & -e(2-3e) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. ***Systeme linearer Differentialgleichungen I***
Wir betrachten ein Modell für die Entstehung von Humus aus absterbenden Bäumen:

$$\begin{aligned}
H(t) &= \text{ Biomasse von Humus,} \\
A(t) &= \text{ Biomasse abgestorbener Bäume,} \\
L(t) &= \text{ Biomasse lebender Bäume,}
\end{aligned}$$

wobei t die Zeit (in Dekaden) beschreibt. Die Dynamik dieses Systems sei gegeben durch das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
H'(t) &= -H(t) + 3A(t), \\
A'(t) &= -3A(t) + 5L(t), \\
L'(t) &= -5L(t).
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems mit den Anfangsbedingungen $H(0) = A(0) = 0$ und $L(0) = L_0$.

(b) Zu welchem Zeitpunkt t^* ist die Biomasse von Humus maximal?

Lösung:

(a) Mit $y(t) = (H(t), A(t), L(t))^\top$ gilt:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} H'(t) \\ A'(t) \\ L'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}}_{=:B} \cdot \begin{pmatrix} H(t) \\ A(t) \\ L(t) \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist somit gegeben durch

$$\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_3 - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -3 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda + 5 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 3)(\lambda + 5),$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ und $\lambda_3 = -5$. Eigenenvektoren von B zu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind (z.B.) $v_1 = (1, 0, 0)^T$, $v_2 = (3, -2, 0)^T$ und $v_3 = (15, -20, 8)^T$. Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems ist demnach

$$y(t) = \begin{pmatrix} H(t) \\ A(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-5t} \begin{pmatrix} 15 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangswerte führen auf das Gleichungssystem

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 15 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $C_1 = \frac{15}{8}L_0$, $C_2 = -\frac{5}{4}L_0$ und $C_3 = \frac{1}{8}L_0$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{15}{8}L_0 e^{-t} - \frac{15}{4}L_0 e^{-3t} + \frac{15}{8}L_0 e^{-5t}, \\ A(t) &= \frac{5}{2}L_0 e^{-3t} - \frac{5}{2}e^{-5t}, \\ L(t) &= L_0 e^{-5t}. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} H'(t) &= -\frac{15}{8}L_0 \left(e^{-t} - 6e^{-3t} + 5e^{-5t}\right) \\ &= \underbrace{-\frac{15}{8}L_0 e^{-5t}}_{\neq 0 \ \forall t \geq 0} \left(e^{4t} - 6e^{2t} + 5\right). \end{aligned}$$

Damit gilt für $t = t^*$:

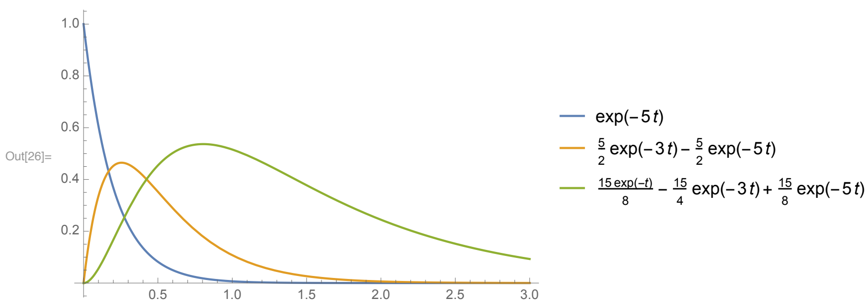
$$e^{4t} - 6e^{2t} + 5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z^2 - 6z + 5 = 0,$$

wobei $z = e^{2t}$. Wir erhalten für die Lösung der quadratischen Gleichung:

$$z_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2,$$

also $z_1 = 5$, $z_2 = 1$. Damit ist $t_{1/2} = \frac{1}{2}\ln(z_{1/2})$, also $t_1 = \frac{1}{2}\ln(5)$ und $t_2 = 0$. Da bei $t_2 = 0$ die Biomasse von Humus 0 ist, muss das Maximum bei t_1 sein (in der Tat ist $H(t_1) > 0$). Somit ist die Biomasse von Humus maximal nach $t^* = \frac{1}{2}\ln(5) \approx 0.805$ Dekaden, also nach etwa 8 Jahren.

Ergänzung: Plot der Funktionen $\frac{L}{L_0}$ (blau), $\frac{A}{L_0}$ (orange), $\frac{H}{L_0}$ (grün):



3. **Systeme linearer Differentialgleichungen II** Bestimmen Sie die Lösung zum Anfangswertproblem mit DGL-System

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) &= 3x_1(t) - 9x_2(t) + 7x_3(t) \end{aligned}$$

und Anfangswerten $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (3, 6, 10)$.

Lösung: Die dazugehörige Matrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist (Entwicklung nach der 1. Zeile)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 3 & -9 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda((-1-\lambda)(7-\lambda)+18)+6 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$. Dazugehörige Eigenvektoren v_1, v_2 und v_3 sind Lösungen zu

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} v_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix} v_2 = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} v_3 = 0,$$

also z.b. $v_1 = (1,1,1)^T$, $v_2 = (1,2,3)^T$ und $v_3 = (1,3,6)^T$. Mit $S = (v_1, v_2, v_3)$ (Matrix mit v_1, v_2 und v_3 als Spalten) und $D = \operatorname{diag}(1,2,3)$ (Diagonalmatrix mit Einträgen $1, 2$ und 3 auf der Diagonalen) gilt also $A = SDS^{-1}$. Mit $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ und $y = S^{-1}x$ gilt nun

$$x' = Ax \Rightarrow x' = SDS^{-1}x \Rightarrow S^{-1}x' = DS^{-1}x \Rightarrow y' = Dy.$$

Dies ist ein entkoppeltes DGL-System mit der allgemeinen Lösung $y(t) = (C_1e^t, C_2e^{2t}, C_3e^{3t})^T$. Folglich gilt

$$x(t) = Sy(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{2t} \\ C_3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Mit den Anfangswerten erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Mit Gauss erhält man

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten sind also $(C_1, C_2, C_3)^T = (1,1,1)^T$ und die Lösung des Anfangswertproblems somit

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + e^{2t} + e^{3t} \\ e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} \\ e^t + 3e^{2t} + 6e^{3t} \end{pmatrix}.$$