D-HEST Mathematik III HS 2021
Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Musterlösung zu Serie 5

1. ***Diagonalisierung von Matrizen***
Betrachten Sie folgende $2 \times 2-$Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, dann finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix P so dass $A = PDP^{-1}$.

(b) Berechnen Sie A^n mit $n \in \mathbb{N}$.

(c) Berechnen Sie $\exp(A)$.

(d) Was können Sie aus Teilaufgabe (c) über Rotationen in der Ebene folgern?

Lösung: Wir können o.B.d.A. $b \neq 0$ annehmen, denn ansonsten ist A bereits eine Diagonalmatrix und es gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = a^n I_2 \quad \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} I_2 = \exp(a) I_2.$$

Sei also $b \neq 0$.

(a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2+b^2)$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$. Somit sind die zwei komplex-konjugierten Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_+ = c, \lambda_- = \bar{c}$, wobei wir $c = a+ib$ gesetzt haben. Einen Eigenvektor zu λ_+ bezeichnen wir mit x_+ und einen Eigenvektor zu λ_- mit x_-. Es gilt

$$Ax_\pm = \lambda_\pm x_\pm \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mp ib & -b \\ b & \mp ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\pm^1 \\ x_\pm^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit erhalten wir $x_\pm = (1, \mp i)^T$. Da diese Vektoren linear unabhängig sind ist A diagonalisierbar mit

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_+, \lambda_-) = \operatorname{diag}(c, \bar{c}), \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^n & 0 \\ 0 & \bar{c}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i(c^n + \bar{c}^n) & -c^n + \bar{c}^n \\ c^n - \bar{c}^n & i(c^n + \bar{c}^n) \end{pmatrix} \\ &= \frac{c^n + \bar{c}^n}{2} I_2 + \frac{c^n - \bar{c}^n}{2i} J, \end{aligned}$$

wobei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Aus Teilaufgabe (b) folgt

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \frac{e^c + e^{\bar{c}}}{2} I_2 + \frac{e^c - e^{\bar{c}}}{2i} J = e^a \cos(b) I_2 + e^a \sin(b) J$$
$$= e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}.$$

wobei wir

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

verwendet haben.

(d) Wir wissen, dass sich jede Rotation in der Ebene in der folgenden Form schreiben lässt

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

wobei $\theta \in [0, 2\pi)$ der Rotationswinkel im Gegeuhrzeigersinn ist. Also sehen wir aus Teilaufgabe (c), dass sich jede Rotation schreiben lässt als

$$R(\theta) = \exp(J_\theta) \quad \text{mit} \quad J_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Anders ausgedrückt ist die Menge der Rotationsmatrizen in $\mathbb{R}^2$ das Bild der schiefsymmetrischen Matrizen unter der Exponentialabbildung, wobei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ schiefsymmetrisch heisst, wenn $A^T = -A$.

2. **Variation der Konstanten**
Wir betrachten das inhomogene Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) + g(t), \qquad y(0) = y^{(0)},$$

wobei A eine $n \times n$-Matrix ist, $y = (y_1, ..., y_n)^\top$, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und $g(t) = (g_1(t), ..., g_n(t))^\top$ mit $g_1, ..., g_n \in C^0(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist durch

$$y(t) = \exp(tA) y^{(0)} + \int_0^t \exp((t-u)A) g(u) du.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dt} e^{-tA} y(t) = e^{-tA} g(t)$. Integrieren Sie diese Gleichung.

(b) Lösen Sie mithilfe von (a) das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) + t, & y_1(0) &= 1 \\ y_2'(t) &= -y_1(t) - \sin(t), & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Lösung:

(a) Wir berechnen $\frac{d}{dt} e^{-tA} y(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{-tA} y(t)\right) &= \left(\frac{d}{dt} e^{-tA}\right) y(t) + e^{-tA} y'(t) && \text{(Produktregel)} \\ &= e^{-tA}(-A) y(t) + e^{-tA}(Ay(t) + g(t)) && \text{(Gl. 0.8 im Skript)} \\ &= -e^{-tA} A y(t) + e^{-tA} A y(t) + e^{-tA} g(t) \\ &= e^{-tA} g(t). \end{aligned}$$

Wir integrieren diese Gleichung auf dem Intervall $[0,t]$:

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-uA} g(u)du &= \int_0^t \frac{d}{du}\left(e^{-uA}y(u)\right)du \\ &= e^{-tA}y(t) - e^{-0\cdot A}y(0) = e^{-tA}y(t) - y^{(0)}.\end{aligned}$$

Schliesslich addieren wir $y^{(0)}$ auf beiden Seiten und multiplizieren mit e^{tA}. Dies ergibt:

$$y(t) = e^{tA}y^{(0)} + e^{tA}\int_0^t e^{-uA}g(u)du = e^{tA}y^{(0)} + \int_0^t e^{(t-u)A}g(u)du.$$

(b) Das Anfangswertproblem kann geschrieben werden als $y'(t) = Ay(t) + g(t)$, $y(0) = y^{(0)}$ wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $g(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$ und $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zunächst berechnen wir $\exp(tA)$ für $t \geq 0$:

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von

$$\det(\lambda I_{2\times 2} - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

also $\lambda_{1,2} = \pm i$. Zugehörige Eigenvektoren sind (z.B.) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, also gilt:

$$\begin{aligned} tA &= t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & -it \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} & -i(e^{it} - e^{-it}) \\ i(e^{it} - e^{-it}) & e^{it} + e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Jetzt benutzen wir die Formel aus **a)**, um die Lösung des Anfangswertproblems anzugeben. Es gilt

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-u) & \sin(t-u) \\ -\sin(t-u) & \cos(t-u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ -\sin(u) \end{pmatrix} du \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t u\cos(t-u)du - \int_0^t \sin(u)\sin(t-u)du \\ -\int_0^t u\sin(t-u)du - \int_0^t \sin(u)\cos(t-u)du \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) + 1 - \cos(t) - \frac{1}{2}(\sin(t) - t\cos(t)) \\ -\sin(t) + \sin(t) - t - \frac{1}{2}t\sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}t\cos(t) \\ -t - \frac{1}{2}t\sin(t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. ***Differentialgleichungen* $\mathbf{n}-$*ter Ordnung***
Finden Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y^{(4)}(t) - 3y''(t) + 2y'(t) = t$

(b) $y^{(8)}(t) + 2y^{(6)} - 2y''(t) - y(t) = 25e^{2t} + 3t$

Hinweis: *Das charakteristische Polynom in Teilaufgabe (b) hat die reellen Nullstellen* $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Lösung:

(a) Wir verwenden Satz 2.15 in Kapitel 2 der Vorlesungsnotizen, um die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y_h^{(4)}(t) - 3y_h''(t) + 2y_h'(t) = 0$$

zu bestimmen. Wir berechnen also die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms*

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^3 - 3\lambda + 2) \stackrel{!}{=} 0.$$

Wir sehen sofort, dass $\lambda_1 = 0$ eine Nullstelle ist. Weiterhin erkennt man, dass auch $\lambda_2 = 1$ eine Nullstelle ist. Wir erhalten (z.B. durch Polynomdivision):

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Damit ist $\lambda_3 = -2$ eine weitere Nullstelle und wir sehen, dass $\lambda_1 = 1$ eine doppelte Nullstelle ist. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet somit:

$$y_h(t) = C_1 + C_2e^t + C_3te^t + C_4e^{-2t}, \qquad C_1, ..., C_4 \in \mathbb{R}.$$

Für eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL machen wir den Ansatz $y_{\text{inh}}(t) = At^2 + Bt + C$ und erhalten:

$$-3 \cdot 2A + 2 \cdot (2At + B) = t.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich unmittelbar: $-6A + 2B = 0$, $4A = 1$. Damit finden wir: $A = \frac{1}{4}$ und $B = \frac{3}{4}$ (C beliebig, wähle $C = 0$). Also lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(t) = C_1 + C_2e^t + C_3te^t + C_4e^{-2t} + \tfrac{1}{4}t^2 + \tfrac{3}{4}t,$$

$C_1, ..., C_4 \in \mathbb{R}$.

(b) Für die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y_h^{(8)}(t) + 2y_h^{(6)} - 2y_h''(t) - y_h(t) = 0$$

gehen wir wie in (a) vor. Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^8 + 2\lambda^6 - 2\lambda^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus dem Hinweis wissen wir, dass $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ Nullstellen sind (wie man auch leicht durch Einsetzen sieht). Damit ist $\lambda^2 - 1$ ein Teiler des charakteristischen Polynoms und durch Polynomdivision erhalten wir:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda^2 - 1)(\lambda^6 + 3\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^3 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + i)^3(\lambda - i)^3. \end{aligned}$$

Somit sind $\lambda_3 = i$ und $\lambda_4 = -i = \overline{\lambda_3}$ dreifache konjugiert komplexe Nullstellen. Wir erhalten die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y_h(t) = {} & C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\sin(t) + C_4\cos(t) \\ & + C_5t\sin(t) + C_6t\cos(t) + C_7t^2\sin(t) + C_8t^2\cos(t), \end{aligned}$$

$C_1, C_2, ..., C_8 \in \mathbb{R}$.
Für eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL machen wir den Ansatz $y_{\text{inh}}(t) = Ae^{2t} + Bt + C$ und erhalten:

$$\underbrace{(2^8 + 2 \cdot 2^7 - 2 \cdot 2^2 - 1}_{=375} e^{2t} - Bt - C \overset{!}{=} 25e^{2t} + 3t.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $A = \frac{25}{375} = \frac{1}{15}$, $B = -3$ und $C = 0$. Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$\begin{aligned} y_h(t) &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \sin(t) + C_4 \cos(t) \\ &\quad + C_5 t \sin(t) + C_6 t \cos(t) + C_7 t^2 \sin(t) + C_8 t^2 \cos(t) + \tfrac{1}{15} e^{2t} - 3t, \end{aligned}$$

$C_1, ..., C_8 \in \mathbb{R}$.