D-HEST | Mathematik III | HS 2021

Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Musterlösung zu Serie 7

1. ***Laplace-Transformation I***
Die Laplace-Transformierte einer stückweise stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert für $s \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > \alpha_f\}$ mit[1] $\alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; |f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ für ein $C > 0\}$ durch die Formel
$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$
Berechnen Sie die Laplace-Transformierte folgender Funktionen:

   (a) *Für gegebene und fixe $a, A > 0$:*
$$f(t) = \begin{cases} A & \textit{falls} \quad 0 \leq t < a \\ -A & \textit{falls} \quad a \leq t < 2a \\ 0 & \textit{falls} \quad 2a \leq t \end{cases}$$

   (b) $f(t) = 2te^{-4t}$

   (c) $f(t) = t^3$

   (d) $f(t) = \cos(\omega t)$ *für* $\omega > 0$

Lösung:

(a) Es gilt
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^a Ae^{-st}\mathrm{d}t + \int_a^{2a} (-A)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{2a}^\infty 0\, e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \frac{A}{s}(1 - e^{-sa}) + \frac{A}{s}(e^{-2sa} - e^{-sa}) + 0 = \frac{A}{s}(1 - e^{-sa})^2\end{aligned}$$
für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Mittels partieller Integration erhält man
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty 2te^{-(s+4)t} = -\frac{2}{s+4}[te^{-(s+4)t}]\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{2}{s+4}\int_0^\infty e^{-(s+4)t}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{(s+4)}e^{-(s+4)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{2}{(s+4)^2}\end{aligned}$$
für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > -4$, wobei wir benutzt haben, dass die Exponentialfunktion e^{ct} $(c > 0)$ für $t \to \infty$ schneller wächst als jedes Polynom und somit die Randterme verschwinden.

(c) Nach dreimaliger partieller Integration erhält man
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty t^3e^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{1}{s^3}\frac{t^3s^2 + 3t^2s + 6t}{e^{st}}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{6}{s^3}\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{6}{s^4}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{6}{s^4}\end{aligned}$$
für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$, wobei wieder der Randterm verschwindet, da die Exponentialfunktion schneller als jedes Polynom wächst.

[1] Hierbei gelte nach Konvention: $\inf \emptyset := \infty$

(d) Wir integrieren zwei Mal partiell (alternativ kann man auch die Formel $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$ verwenden). Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}\,\left[\cos(\omega t)e^{-st}\right]\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s} + \frac{\omega}{s^2}\,\left[\sin(\omega t)e^{-st}\right]\Big|_{t=0}^{t=\infty} - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2}\mathcal{L}[f](s)\,.\end{aligned}$$

Für die Randwerte verwendeten wir

$$\lim_{t\to\infty}\cos(\omega t)e^{-st} = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\sin(\omega t)e^{-st} = 0\,,$$

wenn $\omega > 0$, $s \in \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Lösen wir diese Gleichung nacht $\mathcal{L}[f](s)$ auf, so folgt

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s^2}{s^2+\omega^2}\frac{1}{s} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0, s^2 \neq \omega^2$.

2. ***Laplace-Transformation II***

Die Laplace-Transformierte einer stückweise stetigen Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert für $s \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > \alpha_f\}$ mit $\alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; |f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ für ein $C > 0\}$ durch die Formel

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Entscheiden Sie jeweils, ob die Laplace-Transformierte existiert (also ob $\alpha_f < \infty$) und berechnen Sie sie in diesem Fall:

(a) $f_1(t) = t^2 - 2t + 2$

(b) $f_2(t) = e^{t^2}\cos(t^2)$

(c) $f_3(t) = \cos(\beta t) - 3\sin(\beta t)$, *wobei* $\beta > 0$

(d) $f_4(t) = \sinh(3t-2)$

Lösung:

(a) Zunächst stellen wir fest, dass f_1 auf ganz $[0,\infty)$ stetig ist und für alle $\alpha > 0$ und $C > 0$ hinreichend groß erfüllt, dass $|f_1(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ für alle $t \in [0,\infty)$. Dies sieht man z.B., indem man beobachtet:

$$|f_1(t)| = \frac{|f_1(t)|}{e^{\alpha t}}e^{\alpha t} \leq \underbrace{\max_{u\in[0,\infty)}\frac{|f(u)|}{e^{\alpha u}}}_{=:C<\infty}e^{\alpha t},$$

wobei wir verwenden, dass

$$\lim_{u\to\infty}\frac{|f_1(u)|}{e^{\alpha u}} \leq \frac{u^2+2u+2}{e^{\alpha u}} = 0.$$

Für $\alpha \leq 0$ ist auf der anderen Seite:

$$\lim_{u\to\infty}\frac{|f_1(u)|}{e^{\alpha u}} = \infty.$$

Wir haben damit gesehen, dass

$$\{\alpha \in \mathbb{R}; |f(t)| \leq Ce^{\alpha t} \text{ für ein } C > 0\} = (0,\infty).$$

Wir halten fest, dass $\alpha_{f_1} = 0$ ist. Jetzt kommen wir zur eigentlichen Berechnung der Laplace-Transformierten: Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f_1](s) &= \int_0^\infty (t^2 - 2t + 2)e^{-st}dt \\
&= \underbrace{\left[-\frac{1}{s}t^2e^{-st}\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{s}\int_0^\infty 2te^{-st}dt - 2\underbrace{\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty}_{=0} \\
&- \frac{1}{s}\int_0^\infty 2e^{-st}dt + \left[-\frac{2}{s}e^{-st}\right]_0^\infty \\
&= \frac{2}{s}\underbrace{\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}dt - \frac{2}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{2}{s} \\
&= \frac{2}{s^2}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty - \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} \\
&= \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s}.
\end{aligned}$$

(b) Wir behaupten: $\alpha_{f_2} = \infty$, das bedeutet, für ein gegebenes $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es *kein* $C > 0$, sodass $|f_2(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ für alle $t \in [0, \infty)$ gilt.

In der Tat: Wähle ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ und betrachte die Folge $(t_n)_{n\geq 1}$ mit $t_n = \sqrt{2\pi n}$. Gäbe es ein C mit $|f_2(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ (für *alle* $t \in \mathbb{R}$), so hätten wir:

$$\begin{aligned}
|f_2(t_n)| \leq Ce^{\alpha t_n} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{|e^{t_n^2}\cos(t_n^2)|}{e^{\alpha t_n}} \leq C \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \\
&\quad\;\; \frac{e^{2\pi n}\cos(2\pi n)}{e^{\alpha\sqrt{2\pi n}}} = e^{2\pi n - \alpha\sqrt{2\pi n}} \leq C \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Es gilt aber:

$$\lim_{n\to\infty} e^{2\pi n - \alpha\sqrt{2\pi n}} = \infty,$$

also haben wir einen Widerspruch.

(c) Wir stellen fest, dass f_3 auf $[0, \infty)$ stetig ist und für alle $\alpha \geq 0$ und $C \geq 4$ gilt: $|f_3(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ für alle $t \in [0, \infty)$. Dies sieht man z.B. durch:

$$|f_3(t)| = |\cos(\beta t) - 3\sin(\beta t)| \leq |\cos(\beta t)| + 3|\sin(\beta t)| \leq 4 \leq 4\underbrace{e^{\alpha t}}_{\geq 1}.$$

Wir können also sogar $C = 4$ wählen. Für $\alpha < 0$ auf der anderen Seite wählen wir $(t_n)_{n\geq 1}$ mit $t_n = \frac{2\pi n}{\beta}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_3(t_n)|}{e^{\alpha t_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\cos(2\pi n) - 3\sin(2\pi n)|}{e^{2\pi\alpha n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{2\pi\alpha n}} = \infty.$$

Somit haben wir $\alpha_{f_3} = 0$. Jetzt kommen wir zur eigentlichen Berechnung der Laplace-

Transformierten. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f_3](s) &= \int_0^\infty (\cos(\beta t) - 3\sin(\beta t))e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2}(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t})e^{-st}dt - 3\int_0^\infty \frac{1}{2i}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{2(i\beta - s)}[e^{(i\beta - s)t}]_0^\infty - \frac{1}{2(i\beta + s)}[e^{-(i\beta+s)t}]_0^\infty \\
&- \frac{3}{2i(i\beta - s)}[e^{(i\beta - s)t}]_0^\infty - \frac{3}{2i(i\beta + s)}[e^{-(i\beta+s)t}]_0^\infty \\
&= -\frac{1}{2(i\beta - s)} + \frac{1}{2(i\beta + s)} + \frac{3}{2i(i\beta - s)} + \frac{3}{2i(i\beta + s)} \\
&= \frac{s}{s^2 + \beta^2} - \frac{3\beta}{s^2 + \beta^2}.
\end{aligned}$$

(d) Wieder ist f_4 auf $[0, \infty)$ stetig. Für $\alpha \geq 3$ finden wir ein $C > 0$ groß genug, sodass gilt $|f_4(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ für alle $t \in [0, \infty)$. Dies sieht man z.B. durch:

$$|f_4(t)| = \left|\frac{e^{3t-2} - e^{-3t+2}}{2}\right| \leq \frac{e^{-2}e^{3t} + e^2 e^{-3t}}{2} \leq e^2 \cdot e^{3t} \underbrace{\leq}_{\alpha \geq 3} e^2 \cdot e^{\alpha t}.$$

Wir können also $C = e^2$ wählen. Für $\alpha < 3$ auf der anderen Seite ist:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|f_4(t)|}{e^{\alpha t}} = \infty.$$

Somit haben wir $\alpha_{f_4} = 3$. Jetzt kommen wir zur eigentlichen Berechnung der Laplace-Transformierten: Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 3$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f_4](s) &= \int_0^\infty \frac{1}{2}(e^{3t-2} - e^{-3t+2})e^{-st}dt \\
&= \frac{e^{-2}}{2(3-s)}[e^{(3-s)t}]_0^\infty + \frac{e^2}{2(3+s)}[e^{-(3+s)t}]_0^\infty \\
&= \frac{e^{-2}}{2(s-3)} - \frac{e^2}{2(s+3)}.
\end{aligned}$$

3. **Berechnung von Integralen mittels Laplace-Transformation**
In dieser Aufgabe wollen wir mithilfe der Laplace-Transformation zeigen, dass

$$\int_0^\infty \mathrm{sinc}(t)dt = \frac{\pi}{2},$$

wobei $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ für $t > 0$, $\mathrm{sinc}(0) = 1$. Wir gehen in mehreren Schritten vor:

(a) Zeigen Sie, dass die Laplace-Transformierte von sinc existiert.
Hinweis: Benutzen Sie die Regel von de l'Hospital, um $\lim_{t \to 0} \mathrm{sinc}(t)$ zu berechnen.

(b) Berechnen Sie $\int_s^\infty e^{-\sigma t}d\sigma$ für $s, t > 0$. Stellen Sie damit

$$\mathcal{L}[\mathrm{sinc}](s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\sin(t)}{t}dt$$

als Doppelintegral dar.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}[\mathrm{sinc}](s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$ gilt.
Hinweis: Vertauschen Sie die Reihenfolge des Doppelintegrals aus **b)**. Verwenden Sie $\frac{d}{d\sigma}\arctan(\sigma) = \frac{1}{1+\sigma^2}$.

(d) Berechnen Sie damit $\int_0^\infty \operatorname{sinc}(t)dt$.

Lösung:

(a) sinc ist auf $(0,\infty)$ stetig. Um Stetigkeit in 0 zu zeigen, benutzen wir die Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{t\to 0}\operatorname{sinc}(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)}{1} = \cos(1) = 1.$$

Ausserdem erfüllt sinc die Wachstumsbedingung $|\operatorname{sinc}(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ für jedes $\alpha > 0$ und $C \geq 1$.

(b) Es gilt $\int_s^\infty e^{-\sigma t}d\sigma = -\frac{1}{t}\left[e^{-t\sigma}\right]_s^\infty = -\frac{1}{t}\lim_{A\to\infty} e^{-tA} + \frac{1}{t}e^{-st} = \frac{1}{t}e^{-st}$. Also gilt:

$$\mathcal{L}[\operatorname{sinc}](s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\sigma t}d\sigma\right)\sin(t)dt$$

(c) Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge im obigen Doppelintegral und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\operatorname{sinc}](s) &= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\sigma t}\sin(t)dt\right)d\sigma \\
&= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{2i}(e^{(i-\sigma)t} - e^{-(i+\sigma)t})dt\right)d\sigma \\
&= \int_s^\infty \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-\sigma}e^{(i-\sigma)t} + \frac{1}{i+\sigma}e^{-(i+\sigma)t})\right]_0^\infty d\sigma \\
&= \int_s^\infty \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\sigma-i} - \frac{1}{\sigma+i}\right)d\sigma = \int_s^\infty \frac{1}{1+\sigma^2}d\sigma = [\arctan(\sigma)]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet: $\arctan(\sigma) \to \frac{\pi}{2}$ für $\sigma \to \infty$.

Bemerkung: Man kann auch direkt verwenden, dass gilt $\int_0^\infty e^{-\sigma t}\sin(t)dt = \mathcal{L}[\sin](\sigma) = \frac{1}{1+\sigma^2}$. *Allgemein gilt: Ist* $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, *so ist*

$$\mathcal{L}[g](s) = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](u)du,$$

siehe auch Proposition 3.23 im Skript.

(d) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \operatorname{sinc}(t)dt &= \int_0^\infty \operatorname{sinc}(t)e^{-0\cdot t}dt \\
&= \int_0^\infty \lim_{s\to 0}\operatorname{sinc}(t)e^{-st}dt \\
&= \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \operatorname{sinc}(t)e^{-st}dt \\
&= \lim_{s\to 0}\mathcal{L}[\operatorname{sinc}](s) \\
&= \lim_{s\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(s)\right) = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

denn arctan ist stetig auf $\mathbb{R}$ und erfüllt $\arctan(0) = 0$.